Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra und Funktionentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 07.11.2016 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer, Übungsgruppennummer versehen.

Serie 2 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es seien G eine Gruppe und $N \leq G$ eine Untergruppe. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden vier Bedingungen:

(i) Es gilt: $g \circ n \circ g^{-1} \in N \quad (\forall g \in G, n \in N)$.

(ii) Es gilt: $g \circ N = N \circ g \quad (\forall g \in G)$.

(iii) Die Verknüpfung $\bullet$ auf der Menge $G/N = \{g \circ N \,|\, g \in G\}$, gegeben durch

$$(g \circ N) \bullet (g' \circ N) := (g \circ g') \circ N,$$

ist wohldefiniert (wodurch $(G/N, \bullet)$ zu einer Gruppe wird).

(iv) Es existieren eine Gruppe H und ein Gruppenhomomorphismus $f : G \longrightarrow H$ mit $N = \ker(f)$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Es seien G und H zwei Gruppen und $g \in G$. Zeigen Sie: Ist $f : G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus, so gilt, dass die Ordnung $\mathrm{ord}(f(g))$ von $f(g)$ die Ordnung $\mathrm{ord}(g)$ von g teilt.

(b) Zeigen Sie, dass der einzige Gruppenhomomorphismus $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ $(n \geq 1)$ der Nullhomomorphismus ist.

(c) Es seien G eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler vom Index 3 in G. Finden Sie alle nichttrivialen Gruppenhomomorphismen $f : G \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für $n = 2, \ldots, 10$ mit $N \leq \ker(f)$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei $\mathcal{W}$ die Menge der 1-dimensionalen Unterräume im $\mathbb{F}_3$-Vektorraum $\mathbb{F}_3^2$; es gilt $|\mathcal{W}| = 4$. Die Gruppe $G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ operiert auf der Menge $\mathcal{W}$ durch die Vorschrift

$$S \bullet W := \{S \cdot w \mid w \in W\} \in \mathcal{W} \quad (S \in G, W \in \mathcal{W}).$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Operation einen Gruppenhomomorphismus $f : G \longrightarrow S_4$ induziert.

(b) Bestimmen Sie $\ker(f)$, $\mathrm{im}(f)$ sowie die Ordnung $|G|$ von G.

(c) Es seien die Untergruppen

$$N = \left\{S \in G \mid \det(S) = 1, S^2 = \pm E\right\}, \quad H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \,\middle|\, b, d \in \mathbb{F}_3, d \neq 0 \right\}$$

von G gegeben. Zeigen Sie, dass $G = H \cdot N$ gilt. (*Hinweis*: Verwenden Sie den ersten Isomorphiesatz).

(d) Bestimmen Sie $|G/N|$. Nutzen Sie dazu, dass $N \leq \ker(f)$ gilt und verwenden Sie den zweiten Isomorphiesatz.