HU Berlin Wintersemester 2016/17

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra und Funktionentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 21.11.2016 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer, Übungsgruppennummer versehen.

Serie 4 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie das Inverse von $\overline{71}$ in der Gruppe $(\mathbb{Z}/101\mathbb{Z} \setminus \{\overline{0}\}, \cdot)$.

(b) Bestimmen Sie explizit die Umkehrabbildung des Isomorphismus

$$\mathbb{Z}/89\,081\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/229\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/389\mathbb{Z},$$

welcher durch die Zuordnung

$$a \bmod 89\,081 \mapsto (a \bmod 229, a \bmod 389)$$

gegeben ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle Isomorphieklassen abelscher Gruppen der Ordnung 26 000. Welche davon sind zyklisch?

(b) Es sei A eine endliche abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass für jeden Teiler d von $|A|$ eine Untergruppe B der Ordnung d existiert.

(c) Zeigen Sie, dass die Aussage in (b) für nicht-abelsche Gruppen und Normalteiler im Allgemeinen falsch ist. Nehmen Sie dazu an, dass in S_5 ein **Normalteiler** U vom Index 3 existiert. Zeigen Sie, dass für alle $g \in S_5 \setminus U$ dann $g^3 \in U$ gelten muss und folgern Sie, dass $3|\mathrm{ord}(g)$ gilt. Führen Sie dies zu einem Widerspruch.
Bemerkung: Die Aussage in (b) ist für nicht-abelsche Gruppen auch allgemein falsch. Es gibt in S_5 keine Untergruppe von Index 3.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es seien A eine endlich erzeugte abelsche Gruppe und $A_{\mathrm{tor}} := \{a \in A \mid \operatorname{ord}(a) < \infty\}$ die Menge der sogenannten Torsionselemente von A.

(a) Zeigen Sie, dass A_{tor} eine endliche abelsche Untergruppe von A ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Faktorgruppe A/A_{tor} torsionsfrei ist, also $(A/A_{\mathrm{tor}})_{\mathrm{tor}} = \{A_{\mathrm{tor}}\}$ gilt.

(c) Es sei nun A eine (endliche oder unendliche) zyklische Gruppe. Bestimmen Sie A_{tor}.