HU Berlin Wintersemester 2016/17

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra und Funktionentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 28.11.2016 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer, Übungsgruppennummer versehen.

Serie 5 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass jede endliche Gruppe G eine Kompositionsreihe besitzt.

(b) Es sei die Teilmenge $V_4 := \{\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \subseteq S_4$ gegeben. Zeigen Sie, dass V_4 ein Normalteiler in S_4 ist. Die Untergruppe V_4 wird auch *Klein'sche Vierergruppe* genannt.

(c) Bestimmen Sie alle Kompositionsreihen von S_4 bis auf Isomorphie.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Es sei $0 \longrightarrow U \longrightarrow V \longrightarrow W \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von K-Vektorräumen (K ein Körper). Zeigen Sie, dass dann $\dim_K(V) = \dim_K(U) + \dim_K(W)$ gilt.

(b) Es sei $\{e\} \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow G'' \longrightarrow \{e\}$ eine kurze exakte Sequenz von Gruppen. Beweisen Sie: Die Gruppe G ist genau dann auflösbar, wenn sowohl G' als auch G'' auflösbar sind.
Hinweis: Verwenden Sie die Isomorphiesätze.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei G eine Gruppe. Wir bezeichnen mit

$$[G,G] := \left\langle ghg^{-1}h^{-1} \,|\, g,h \in G \right\rangle$$

den *Kommutator von G*. Weiter seien die *j-ten iterierten Kommutatoren $D^j(G)$ von G* ($j \in \mathbb{N}$) induktiv definiert durch $D^0(G) := G$ und $D^{j+1}(G) := [D^j(G), D^j(G)]$. Beweisen Sie:

(a) Der Kommutator $[G,G]$ ist ein Normalteiler in G und die Faktorgruppe $G/[G,G]$ ist abelsch.

(b) Die Gruppe G ist genau dann auflösbar, wenn $D^n(G) = \{e\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt.