HU Berlin Wintersemester 2016/17

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra und Funktionentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 05.12.2016 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer, Übungsgruppennummer versehen.

Serie 6 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei R ein kommutativer Ring mit Einselement. Zeigen Sie:

(a) Die Summe $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ und der Durchschnitt $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ zweier Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq R$ sind ebenfalls Ideale in R.

(b) Ein Ideal $\mathfrak{p} \subseteq R$ ist genau dann ein Primideal, wenn $R/\mathfrak{p}$ ein Integritätsbereich ist.

(c) Ein Ideal $\mathfrak{m} \subsetneq R$ ist genau dann ein maximales Ideal, wenn $R/\mathfrak{m}$ ein Körper ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Die Menge

$$\mathbb{Q}(\sqrt{-3}) := \left\{ a + b\sqrt{-3} \,|\, a, b \in \mathbb{Q} \right\}$$

mit den natürlichen Operationen

$$(a + b\sqrt{-3}) + (c + d\sqrt{-3}) := (a + c) + (b + d)\sqrt{-3}$$
$$(a + b\sqrt{-3}) \cdot (c + d\sqrt{-3}) := (ac - 3bd) + (ad + bc)\sqrt{-3}$$

ist ein Ring. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ sogar ein Körper ist.

(b) Bestimmen Sie alle Einheiten des Unterrings

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] := \left\{ \alpha = \frac{a + b\sqrt{-3}}{2} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{Z},\, a \equiv b \mod 2 \right\} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{-3}).$$

Hinweis: Definieren Sie die *Norm* $N(\alpha)$ *eines Elements* $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ durch

$$N(\alpha) := (a^2 + 3b^2)/4.$$

Beweisen und verwenden Sie die Eigenschaften $N(\alpha) \in \mathbb{Z}$ und $N(\alpha \cdot \beta) = N(\alpha) \cdot N(\beta)$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Gruppe S_5 nicht auflösbar ist. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

(a) Zeigen Sie, dass die Kommutatoruntergruppe $[A_5, A_5]$ alle 3-Zykel enthält, indem Sie einen beliebigen 3-Zykel (jkl) als Kommutator zweier Elemente in A_5 darstellen.

(b) Zeigen Sie, dass die Untergruppe A_5 von der Menge der 3-Zykel erzeugt wird.

(c) Folgern Sie nun mit Hilfe von Aufgabe 3 aus Serie 5, dass A_5 und damit auch S_5 nicht auflösbar sind.