HU Berlin Wintersemester 2016/17

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra und Funktionentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 12.12.2016 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer, Übungsgruppennummer versehen.

Serie 7 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es sei $f(X) = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom von Grad $n > 0$.

(a) Zeigen Sie: Gibt es eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$, so dass gilt

- (i) $p \nmid a_n$,
- (ii) $p \mid a_j$ $(j = 0, \ldots, n-1)$,
- (iii) $p^2 \nmid a_0$,

so ist $f(X)$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

(b) Zeigen Sie: Ist $f(X)$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$, so ist auch das Polynom $g(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_n$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

(c) Zeigen Sie, dass das Polynom $6X^5 - 9X^3 + 12X^2 - 4$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

(a) Betrachten Sie in $\mathbb{Z}$ das Ideal

$$\mathfrak{a} = \{231a + 273b + 1001c \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}.$$

Bestimmen Sie $d \in \mathbb{Z}$ mit $\mathfrak{a} = (d)$. Begründen Sie.

(b) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\alpha = \sqrt{3} + \sqrt{5}$ in $\mathbb{Q}[X]$. Finden Sie ein Polynom $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ mit $f(\alpha) = \alpha^{-1}$.

(c) Es sei das Polynom $g(X) = X^5 + 2X^3 + X + 1$ gegeben. Stellen Sie $g(\alpha)$ und $g(\alpha)^{-1}$ als rationale Linearkombinationen aus 1, α, α^2 und α^3 dar.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei K ein Körper. Die symmetrische Gruppe S_n wirkt auf dem Polynomring $K[X_1, \dots, X_n]$ durch Vertauschung der Variablen $X_1, \dots, X_n$, d. h. vermöge der Zuordnung

$$(\sigma \bullet p)(X_1, \dots, X_n) := p(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) \quad (\sigma \in S_n,\, p \in K[X_1, \dots, X_n]).$$

Ein Polynom $p \in K[X_1, \dots, X_n]$ heißt *symmetrisch*, falls $\sigma \bullet p = p$ für alle $\sigma \in S_n$ gilt. Für $k = 1, \dots, n$ definieren wir das *k-te elementarsymmetrische Polynom* σ_k durch

$$\sigma_k(X_1, \dots, X_n) := \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n} X_{j_1} X_{j_2} \cdots X_{j_k},$$

d. h. für $k = 1$ und $k = n$ erhalten wir beispielsweise

$$\sigma_1(X_1, \dots, X_n) = X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad \text{und} \quad \sigma_n(X_1, \dots, X_n) = X_1 \cdot X_2 \cdots X_n.$$

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass sich jedes symmetrische Polynom als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen ausdrücken lässt.
Dazu ordnen wir die Menge der Monome $\{X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n} \mid k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}\}$ *lexikographisch* an, d. h. es ist $X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n} > X_1^{l_1} \cdots X_n^{l_n}$, falls es ein $d \in \{0, \dots, n-1\}$ gibt, so dass $k_j = l_j$ $(j = 0, \dots, d)$ und $k_{d+1} > l_{d+1}$ gilt.
Es sei nun $p \in K[X_1, \dots, X_n]$ ein symmetrisches Polynom und

$$p_{\max}(X_1, \dots, X_n) := X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n}$$

das lexikographisch größte in p vorkommende Monom.

(a) Beweisen Sie, dass für das Monom $p_{\max}$ die Ungleichungen $k_1 \geq \dots \geq k_n$ bestehen.

(b) Zeigen Sie, dass das größte Monom des Polynoms $\sigma_1^{k_1-k_2} \sigma_2^{k_2-k_3} \cdots \sigma_n^{k_n}$ gleich $p_{\max}$ ist.

(c) Zeigen Sie nun mit Hilfe einer vollständigen Induktion, dass das Polynom p als Polynom in den elementarsymmetrischen Polynomen $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ dargestellt werden kann.