

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra und Funktionentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 04.01.2017 in der Vorlesung

Bitte beachten:

JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.

JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer, Übungsgruppennummer versehen.

Serie 8 (30+10 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

- (a) Es sei $K \subseteq L \subseteq E$ eine Kette von Körpererweiterungen. Zeigen Sie, dass E/K genau dann algebraisch ist, wenn sowohl E/L als auch L/K algebraisch sind.
- (b) Es seien E/K eine Körpererweiterung und $\alpha, \beta \in E$ algebraisch über K . Beweisen Sie die Ungleichung

$$[K(\alpha, \beta) : K] \leq [K(\alpha) : K] \cdot [K(\beta) : K].$$

Zeigen Sie, dass im Fall $\text{ggT}([K(\alpha) : K], [K(\beta) : K]) = 1$ sogar die Gleichheit gilt.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Wir betrachten die Menge

$$\overline{\mathbb{Q}} := \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha \text{ algebraisch über } \mathbb{Q}\}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass $\overline{\mathbb{Q}}$ mit der von \mathbb{C} induzierten Addition und Multiplikation ein Körper ist.
- (b) Beweisen Sie unter Verwendung des Fundamentalsatzes der Algebra, dass $\overline{\mathbb{Q}}$ algebraisch abgeschlossen ist, d. h. dass die Nullstellen eines Polynoms positiven Grades in $\overline{\mathbb{Q}}[X]$ wieder in $\overline{\mathbb{Q}}$ liegen.
- (c) Zeigen Sie, dass $\overline{\mathbb{Q}}$ eine algebraische, aber keine endliche Erweiterung von \mathbb{Q} ist.

Den Körper $\overline{\mathbb{Q}}$ nennt man *algebraischen Abschluss von \mathbb{Q}* .

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei $E := \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{7})$ eine Körpererweiterung von \mathbb{Q} . Bestimmen Sie ein $\vartheta \in E$ mit der Eigenschaft $E = \mathbb{Q}(\vartheta)$.

Aufgabe 4* (10 Punkte)

Die Weihnachtsparty der Weihnachtswichtel nahm ein jähes Ende, als Knecht Ruprecht den Raum stürmte und 10 Wichtel in seinen Sack steckte und entführte. Nun sitzen sie in den Kerkerzellen Nummer 1 bis 10 seines Schlosses und sollen am nächsten Tag in die sibirischen Wälder verschickt werden, um dort bis ans Ende ihrer Tage Ruten zu binden.

Harry, der Wortführer der Wichtel, fasst sich ein Herz und bittet Ruprecht um Gnade. Knecht Ruprecht denkt kurz nach, dann überzieht ein böses Lächeln sein dunkles Gesicht. „Na gut“, meint er. „Ich werde euch eine Chance geben. Morgen früh werde ich euch nacheinander aus euren Zellen in einen Raum führen. In diesem stehen 10 Kisten aufgereiht, in denen ich Zettel mit den Zahlen von 1 bis 10 zufällig verteilt habe. Der hereingeführte Wichtel darf nacheinander 5 Kisten öffnen. Findet er in einer Kiste seine eigene Zellennummer, so wird der nächste Wichtel hereingeführt. Findet er seine Nummer nicht, so werden sofort alle Wichtel nach Sibirien verschifft. Hat am Ende jeder Wichtel seine eigene Zellennummer gefunden, so seid ihr frei“.

„Das ist doch ein Witz!“ ruft der schnellste Rechner unter den Wichteln. „So beträgt unsere Chance, freizukommen, weniger als ein Tausendstel!“ Harry brütet noch. „Ich habe das Gefühl, mit der richtigen Strategie können wir unsere Chancen deutlich erhöhen“, sagt er schließlich.

Zeigen Sie, dass Harry recht hat und ihre Chancen auf Freilassung tatsächlich besser als 35% stehen.



★ Frohe Weihnachten und ein gutes Neues Jahr 2017! ★