HU Berlin Wintersemester 2016/17

Übungsaufgaben zur Vorlesung

Algebra und Funktionentheorie

Prof. Dr. J. Kramer

Abgabetermin: 09.01.2017 in der Vorlesung

Bitte beachten:
JEDE Aufgabe auf einem neuen Blatt abgeben.
JEDES Blatt mit Namen, Matrikelnummer, Übungsgruppennummer versehen.

Serie 9 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Welche der folgenden Körpererweiterungen sind normal?

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ über $\mathbb{Q}$.

(b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})$ über $\mathbb{Q}$.

(c) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

(d) $\mathbb{F}_3[X]/(X^2+X-1)$ über $\mathbb{F}_3$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es seien E eine Galoiserweiterung über dem Körper K und $G = \mathrm{Gal}(E/K)$ die zugehörige Galoisgruppe. Wir betrachten die Mengen

$$\mathcal{K} = \{L \mid K \subseteq L \subseteq E \text{ Zwischenkörper}\},$$
$$\mathcal{G} = \{H \mid H \leq G \text{ Untergruppe}\}.$$

Nach dem Hauptsatz der Galoistheorie besteht eine bijektive Zuordnung $\varphi : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{G}$, gegeben durch

$$\varphi(L) = G^L = \mathrm{Gal}(E/L) \quad (L \in \mathcal{K}).$$

Es seien nun $L_1, L_2 \in \mathcal{K}$ und $H_j = \varphi(L_j) \in \mathcal{G}$ $(j = 1, 2)$. Beweisen Sie:

(a) Es besteht die Äquivalenz $L_1 \subseteq L_2 \Longleftrightarrow H_1 \supseteq H_2$.

(b) Bezeichnen wir mit $L_1 \cdot L_2$ das *Kompositum von* L_1 *mit* L_2, d. h. den kleinsten Unterkörper von E, der L_1 und L_2 umfasst, so gilt $\varphi(L_1 \cdot L_2) = H_1 \cap H_2$.

(c) Für $L \in \mathcal{K}$ und $\sigma \in G$ besteht die Gleichheit $\mathrm{Gal}(E/\sigma(L)) = \sigma \circ \mathrm{Gal}(E/L) \circ \sigma^{-1}$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es seien K ein Körper und $p \in K[X]$. Beweisen Sie:

(a) Das Polynom p ist genau dann separabel (d. h. hat keine mehrfachen Nullstellen), wenn $\mathrm{ggT}(p, p')$ eine Einheit in $K[X]$ ist.

(b) Ist p irreduzibel, so ist p genau dann separabel, wenn $p' \neq 0$ gilt.

(c) Es sei nun $K = \mathbb{F}_3(T)$ der Körper der rationalen Funktionen über $\mathbb{F}_3$. Zeigen Sie, dass das Polynom $X^3 - T \in K[X]$ irreduzibel und inseparabel ist.