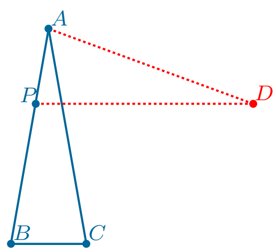
MSG Zirkel 7c – Hausaufgaben – Musterlösung
vom 03.11.2016 zum 10.11.2016
Daniel Platt – `www.math.hu-berlin.de/~plattd`

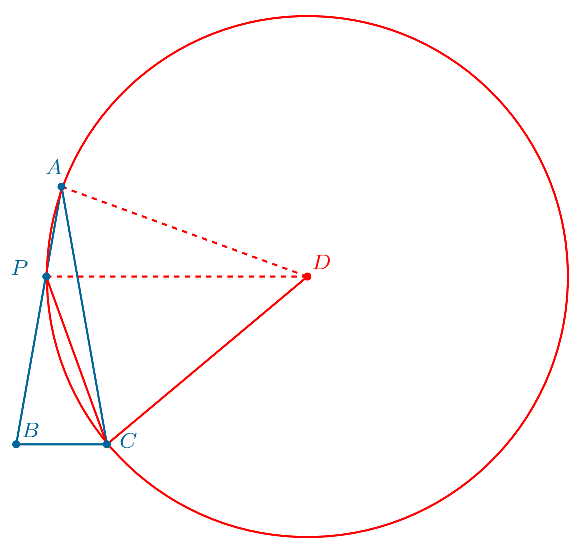
Aufgabe 5 (5 Punkte):

Gegeben sei ein Dreieck ΔABC mit $\angle ABC = \angle ACB = 80°$. Es sei P ein Punkt auf der Strecke $\overline{AB}$, sodass die Strecken $\overline{AP}$ und $\overline{BC}$ die gleiche Länge haben. Bestimme die Größe von $\angle BPC$.

Lösungsanleitung, muss nicht benutzt werden: Setze eine Kopie des Dreiecks auf der Strecke $\overline{AP}$ auf und nenne den neuen Eckpunkt D, wie im Bild zu sehen. Bestimme die Innenwinkel von ΔACD. Schlage einen Kreis um D durch A. Welche Punkte liegen alle auf diesem Kreis und warum? Wende dann den Zentri-Peripheriewinkelsatz an.



Lösung:



Wie im Aufgabentext beschrieben setzen wir eine Kopie von ΔABC auf die Strecke AP auf. Die Eckpunkte des Dreiecks seien A, P, D.

Das Dreieck ΔABC hat die Innenwinkelsumme 180°, also:

$$\begin{aligned} 180^\circ &= \angle BAC + \angle ACB + \angle CBA \\ &= \angle BAC + 80^\circ + 80^\circ \\ \Rightarrow \qquad 20^\circ &= \angle BAC. \end{aligned} \tag{1}$$

Es ist $\angle BAD = 80^\circ$, weil das neu aufgesetzte Dreieck ja eine Kopie von ΔABC ist, also die gleichen Innenwinkel hat. Folglich gilt

$$\begin{aligned} \angle CAD &= \angle BAD - \angle BAC \\ &= 80 \circ - 20^\circ = 60^\circ. \end{aligned} \tag{2}$$

Nach Konstruktion sind die Strecken AC und AD gleich lang. Also ist ΔACD eine gleichschenkligen Dreieck. Aus der Innenwinkelsumme von ΔACD folgt, dass

$$\angle DCA = \angle ADC = 60^\circ. \tag{3}$$

Das heißt also, dass ΔACD gleichseitig ist. Also ist auch die Strecke CD so lang wie die Strecken AD und DP. Folglich liegen die Punkte A, C, P auf einem gemeinsamen Kreis um D, wie im Bild eingezeichnet.

Wir betrachten nun die Strecke AP: Nach dem Zentri-Peripheriewinkelsatz gilt:

$$\angle ACP = \frac{1}{2} \cdot \angle ADP = \frac{1}{2} \cdot 20^\circ = 10^\circ. \tag{4}$$

Nach dem Außenwinkelsatz im Dreieck ΔPCA gilt dann:

$$\angle BPC = \angle ACP + \angle PAC = 10^\circ + 20^\circ = 30^\circ. \tag{5}$$

(Ende der Lösung)

Aufgabe 6 (4 Punkte):

Auf einem Tisch stehen zwei Gläser, die zur gleichen Höhe gefüllt sind. Das eine ist gefüllt mit Rotwein, das andere mit Weißwein.

Man nimmt einen Löffel aus dem Rotweinglas und gibt ihn in das Weißweinglas und rührt das so entstandene Gemisch gut um. Danach nimmt man einen Löffel des Gemischs und gibt ihn zurück in das Rotweinglas. Befindet sich am Ende mehr Rotwein im Weißweinglas oder mehr Weißwein im Rotweinglas?

Lösung:

Wir legen fest: Zu Beginn enthält jedes Glas je x Liter Wein. Nach beiden Umfüllungen betrage die Menge Rotwein im Weißweinglas r Liter. Die übrigen $x - r$ Liter Rotwein befinden sich also offensichtlich noch im Rotweinglas.

Insgesamt befinden sich nach beiden Umfüllungen wieder insgesamt x Liter Wein im Rotweinglas. Zieht man davon die $x - r$ Liter Rotwein ab, erhält man die Menge an Weißwein in diesem Glas, die $x - (x - r) = r$ Liter beträgt.

Es befindet sich also am Ende die gleiche Menge Rotwein im Weißweinglas, wie Weißwein im Rotweinglas. (In beiden Fällen nämlich genau r Liter)