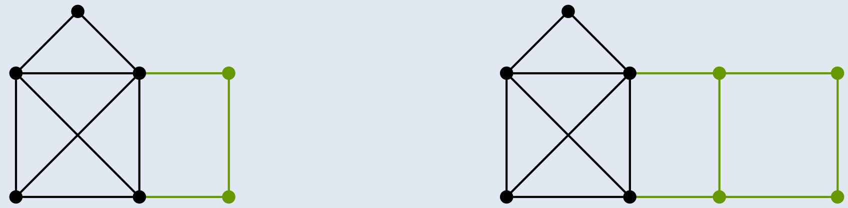
Aufgabe 46 (5 Punkte):

(a) In welchen der folgenden Graphen existiert ein Eulerweg und/oder ein Eulerkreis? (D.h. ein Weg/Kreis durch den Graphen, der jede Kante genau einmal durchläuft)



(b) Wir betrachten einen vollständigen n-Ecksgraphen. Also einen Graphen mit n Ecken, in dem jede Ecke durch genau eine Kante mit jeder übrigen Ecke verbunden ist.

Enthält der Graph einen Eulerweg? Falls nein: Wie viele Kanten muss man mindestens hinzufügen, damit der Graph einen Eulerweg enthält? Beantworte die Frage in Abhängigkeit von n.

(a) Im linken Graphen gibt es genau zwei Ecken mit ungeradem Grad (links unten und die rechte obere Hausecke), also existiert nach dem Satz aus dem Zirkel ein Eulerweg, aber kein Eulerkreis.

Im rechten Graphen gibt es mehr als zwei Ecken mit ungeradem Grad (außer den beiden zuvor genannten noch die mittleren Ecken im grünen Anbau). Es existieren dort also weder Eulerweg noch Eulergraph.

(b) Falls n ungerade ist, so haben alle Ecken geraden Grad, und es existiert daher ein Eulerkreis. (Weil ein Eulerkreis ein Spezialfall eines Eulerwegs ist, existiert also auch ein Eulerweg)

Falls $n = 2$ ist, so existiert offensichtlich ein Eulerweg, aber kein Eulerkreis.

Falls n gerade und größer als zwei ist, so haben mehr als zwei Ecken ungeraden Grad – nämlich alle Ecken des Graphen! Um die ungeraden Eckengrade auszugleichen benötigen wir $\frac{n-2}{2}$ Extrakanten.

Zusatzaufgabe 47∗ (5 Zusatzpunkte):
Konstruiere Graphen mit den folgenden Eigenschaften, oder beweise, dass solche Graphen nicht existieren:

(a) Ein Graph mit 6 Ecken, die die Grade 1, 2, 3, 4, 5, bzw. 6 haben.

(b) Ein Graph mit 7 Ecken, die die Grade 1, 2, 3, 4, 5, 6, bzw. 7 haben.

(a) Ein solcher Graph existiert nicht.

Jede Kante im Graphen erhöht den Gesamtgrad des Graphen um 2. Der Gesamtgrad im Graphen muss also eine gerade Zahl sein. Es ist aber

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

eine ungerade Zahl, folglich kann ein solcher Graph nicht existieren.

Hinweis: Die obige Aussage ist bekannt als Handschlaglemma (Hand Shaking Lemma).

(b) Ein solcher Graph existiert und es lässt sich leicht ein Beispielgraph angeben.

Zusatzaufgabe 48$*$ (4 Zusatzpunkte):
Eine Zahlenfolge sei folgendermaßen definiert: Die erste Zahl ist eine Primzahl p. Die folgende Zahl erhält man aus der vorhergehenden Zahl, indem man sie verdoppelt und 1 addiert.
Kann es eine Startzahl geben, sodass die Folge nur aus Primzahlen besteht?

Nein, so eine Startzahl kann es nicht geben. Für $p = 2$ ist das zweite Folgenglied 5, es ergibt sich also die gleiche Folge, wie wenn man bei $p = 5$ startet, nur verschoben. Wir können also o.B.d.A. annehmen, dass p ungerade ist.

Das n-te Folgenglied (bei $n = 0$ startend) hat die Form $2^n \cdot p + 2^n - 1$. Dann gilt nach Fermats kleinem Satz:

$$2^p \equiv 1 \pmod{p},$$

d.h. p teilt $2^p - 1$. D.h. p teilt das p-te Folgenglied.

Hinweis: Die Aufgabe war leider zu schwer gestellt. Den kleinen Satz von Fermat hatten wir vorher nicht im Zirkel behandelt. Entschuldigung dafür.

Hinweis: Bis heute ist keine Zahlenfolge bekannt, die sich durch elementare arithmetische Operationen (plus, minus, mal, geteilt) definieren lässt und unendlich viele verschiedene Primzahlen liefert. Eine solche Zahlenfolge würde ihrem Entdecker sofort weltweite Berühmtheit einbringen.