MSG Zirkel 7c – Hausaufgaben
vom 27.04.2017 zum 04.05.2017
Daniel Platt – `www.math.hu-berlin.de/~plattd`

In einem Zirkel ausgegebene Hausaufgaben können im jeweils nächsten Zirkel bearbeitet abgegeben werden. Ihr erhaltet eine Korrektur im darauffolgenden Zirkel. Bitte beachtet folgende Hinweise:

(i) Die Richtigkeit jedes Ergebnisses muss bewiesen werden. Falls eine Rechnung durchgeführt wird, gehört dazu auch eine Erklärung, was gerechnet wird.

(ii) Beschriftet jedes Blatt, das ihr abgebt, mit eurem Namen. (Zu eurem Namen gehört mindestens ein Vorname und mindestens ein Nachname!)

(iii) Falls ihr mehr als ein Blatt abgebt, so heftet diese zusammen.

Auf diesem Hausaufgabenblatt soll gezeigt werden, dass manche Zahlenreihen eine endliche Summe haben, manche keine endliche Summe haben. So gilt zum Beispiel $0+0+0+\cdots=0$, d.h. diese Zahlenreihe hat eine endliche Summe. Allerdings gilt: $1+1+1+\ldots$ wird unendlich groß, d.h. diese Zahlenreihe hat keine endliche Summe.

- Zusatzufgabe 49$*$ (7 Punkte): (*die geometrische Reihe*)

  (a) Berechne die Summe $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\frac{1}{65536}$.

  (b) Sei nun q eine rationale Zahl. (Zum Beispiel ergibt sich für $q=\frac{1}{2}$ Teilaufgabe (a)) Beweise, dass die folgende Gleichheit für eine endliche Summe von Termen gilt:

  $$1+q^1+q^2+\cdots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \qquad (1)$$

  Hinweis: Schreibe $1+q^1+q^2+\cdots+q^n=x$, multipliziere diese Gleichung mit q und ziehe die beiden Gleichungen voneinander ab. Es ergibt sich dann der behauptete Wert für x.

  (c) Falls q eine rationale Zahl kleiner als 1 ist, welchem Wert nähert sich dann die rechte Seite von Gleichung (1) für sehr großes n an? (ohne Beweis)

  Was bedeutet das für die *unendliche* Summe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$?

- Aufgabe 50 (4 Punkte): (*die harmonische Reihe*)

  Beweise, dass der Ausdruck $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$ mit zunehmender Anzahl Summanden unendlich groß wird.

MSG Zirkel 7c – Hausaufgaben
vom 27.04.2017 zum 04.05.2017
Daniel Platt – www.math.hu-berlin.de/~plattd

Hinweis: Es gilt

$$\begin{aligned}
1 &\geq \frac{1}{2}, \\
\frac{1}{2} &\geq \frac{1}{2}, \\
\frac{1}{3}+\frac{1}{4} &\geq \frac{1}{2}, \\
\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} &\geq \frac{1}{2}, \\
\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16} &\geq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Setzt sich dieses Muster so fort? Warum? Wir haben $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=\infty$*, was bedeutet das für den Wert der Ausgangsreihe?*