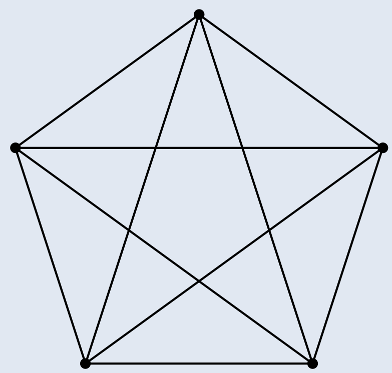
Aufgabe 51 (8 Punkte + 1 Zusatzpunkt):
Im Zirkel haben wir gezeigt, dass der Graph $K_{3,3}$ nicht planar ist. Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass auch der vollständige Fünfecksgraph K_5 nicht planar ist. (Der Graph ist im Folgenden abgebildet)



(a) Nenne die Eulersche Polyederformel für einen zusammenhängenden, planaren Graphen. (Ohne Beweis)

(b) Gegeben sei ein zusammenhängender, planarer Graph ohne Zweiecke und Einecke mit K Kanten und G Gebieten. Zeige, dass dann gilt: $3G \leq 2K$.

(c) Wie viele Ecken und Kanten hat der vollständige Fünfecksgraph K_5? Warum ist das ein Widerspruch zu den Teilen (a) und (b), falls man annimmt, dass K_5 planar ist?

(d$*$) Denke dir eine Textaufgabe aus, in der der Graph K_5 ohne sich schneidende Kanten gezeichnet werden soll.

(Die Textaufgabe zum Graphen $K_{3,3}$ lautete z.B.: *In einer Stadt gibt es drei Wohnhäuser und ein Elektrizitätswerk, ein Wasserwerk und eine Internetfirma. Lege Leitungen von jedem Versorgungsgebäude zu jedem Wohnhaus, ohne dass sich die Leitungen schneiden.*)

(a) In einem zusammenhängenden, planaren Graphen sei E die Anzahl der Ecken, K die Anzahl der Kanten und G die Anzahl der Gebiete des Graphen. Dann gilt

$$E - K + G = 2. \tag{1}$$

(b) Es sei λ die Anzahl von Kanten, von der ein Gebiet *durchschnittlich* umgeben ist – das muss keine ganze Zahl sein. Dann gilt für die Anzahl der Kanten $K \leq \lambda G \leq 2K$. Die Ungleichheitszeichen kommen daher, dass wir beim Produkt λG jede Kante, die an ein Gebiet angrenzt, mindestens einmal und höchstens zweimal zählen.

Nach Voraussetzung ist $\lambda \geq 3$, also erhalten wir

$$3G \leq \lambda G \leq 2K. \tag{2}$$

(c) Für K_5 gilt $E = 5$, $K = 10$.

Angenommen, K_5 ist planar. Dann gilt Gleichung 1 für K_5. Außerdem enthält K_5 keine Einecke oder Zweiecke, also gilt auch Gleichung 2.

Gleichung 1 nach G aufgelöst lautet $G = 2 + K - E$. Dies in Gleichung 2 eingesetzt ergibt

$$3 \cdot (2 + K - E) \leq 2K.$$

Setzen wir die Werte von E und K ein, so ergibt sich

$$3 \cdot (2 + 10 - 5) = 21 \leq 20,$$

was ein Widerspruch ist.

Also muss die Annahme, dass K_5 planar ist, falsch gewesen sein.

(d) Eine mögliche Textaufgabe könnte zum Beispiel folgendermaßen lauten:

In einer Stadt gibt es fünf Fußballklubs, die in verschiedenen Klubheimen untergebracht sind. Solange sich Fans von nur zwei verschiedenen Fußballklubs begegnen, gibt es keine Probleme. Begegnen sich allerdings mal Fans von drei verschiedenen Fußballklubs gleichzeitig, dann gibt es jedes Mal sofort Ausschreitungen. Die Stadt möchte daher Routen von jedem Fußballklub zu jedem anderen planen, die sich nicht schneiden, sodass kein Risiko besteht, dass sich drei verschiedene Fangruppen begegnen. Kann die Stadt ein solches Routennetz anlegen?

Aufgabe 52 (2 Punkte):
Finde alle ganzen Zahlen n und m, die die Gleichung $nm - n^2m^2 = 0$ lösen.

Wir haben $0 = nm - n^2m^2 = nm \cdot (1 - nm)$. Damit das Produkt 0 ergeben kann, muss $nm = 0$ oder $(1 - nm) = 0$ (d.h. $nm = 1$ gelten).

Alle Lösungen, die zu $nm = 0$ führen, lauten: $(n, 0)$ und $(0, m)$ für n, $m \in \mathbb{Z}$.

Alle Lösungen, die zu $nm = 1$ führen, lauten $(1, 1)$ und $(-1, -1)$.