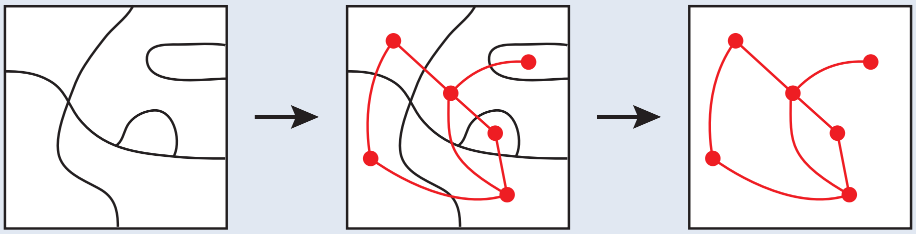
Aufgabe 53 (10 Punkte):
Ziel dieser Aufgabe ist es, den *6-Farbensatz* zu beweisen.

(a) Gegeben sei ein planarer Graph. Man erhält daraus den dualen Graphen, indem man jedes Gebiet durch eine Ecke ersetzt und zwei Ecken durch eine Kante verbindet, falls im ursprünglichen Graphen die Gebiete benachbart waren. Ein Beispiel des Übergangs vom Graphen zu seinem dualen Graphen ist im Folgenden abgebildet:



Zeige, dass ein dualer Graph zu einem beliebigen planaren Graph keine Einecke und Zweiecke hat. Welche Beziehung zwischen Eckenzahl und Kantenzahl gilt in solchen Graphen? (Du kannst ohne Beweis benutzen, dass der duale Graph eines planaren Graphen selbst planar ist)

(b) Beweise die folgende Behauptung:

Im dualen Graphen zu einem planaren Graphen gibt es immer eine Ecke mit Eckengrad < 6.

Hinweis: Beweise durch Widerspruch und benutze Teil (a).

(c) Beweise nun die folgende Behauptung:

In einem dualen Graphen zu einem planaren Graphen kann man die Ecken so mit sechs Farben färben, dass je zwei Ecken, die durch eine Kante miteinander verbunden sind, verschiedene Farben haben.

Hinweis: Gegeben den dualen Graphen, entferne nach und nach Ecken mit Eckengrad < 6*, bis nur noch 6 Ecken übrig sind. (Warum geht das?) Diesen Graphen kann man mit 6 Farben färben. Was kann man nun sagen, wenn man das Entfernen der Ecken Schritt für Schritt rückgängig macht?*

(a) Bei der Erstellung des dualen Graphen wird nicht geprüft, ob ein Gebiet mit sich selbst verbunden ist. Es gibt im dualen Graphen also keine Einecke.

Außerdem werden zwischen zwei Ecken im dualen Graphen entweder eine oder null Kanten gezeichnet, niemals aber mehr als eine. Folglich gibt es auch keine Zweiecke.

Nach Aufgabe 51 (b) gilt damit für die Anzahlen von Kanten (K) und Gebieten (G):

$$3G \leq 2K. \tag{1}$$

Außerdem gilt noch die Eulersche Polyederformel

$$2 - E + K = G. \tag{2}$$

(b) Angenommen, so eine Ecke existiert nicht, d.h. alle Ecken haben Eckengrad ≥ 6.

Wir zählen für jede Ecke die Kanten, die an sie angrenzen und summieren alle Zahlen. Wir erhalten dadurch das Doppelte der Kantenzahl im Graphen, d.h. $2K \geq 6E$ bzw

$$E \leq \frac{1}{3}K. \tag{3}$$

Setzen wir Gleichung 1 in Gleichung 2 ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} & 2 - E + K = G \leq \frac{2}{3}K \\ \Rightarrow \quad & K \leq 3E - 6. \end{aligned} \tag{4}$$

Setzen wir nun in der letzten Zeile Gleichung 3 ein, so erhalten wir

$$K \leq 3E - 6 \leq K - 6, \tag{5}$$

doch $K \leq K - 6$ kann nicht stimmen, d.h. unsere Annahme vom Anfang muss falsch gewesen sein.

(c) Gegeben den dualen Graphen, dann finden wir nach Teil (b) eine Ecke, die Grad < 6 hat. Entferne diese Ecke und alle Kanten, die zu ihr führen. Im neuen Graphen gibt es wieder eine Ecke mit Grad < 6, entferne sie erneut und wiederhole dies solange, bis nur noch 6 Ecken übrig sind.

Diese 6 Ecken kann man mit 6 Farben geeignet färben. Füge nun Schritt für Schritt die entfernten Ecken wieder ein. Bei Einfügen wird stets eine Ecke mit höchsten 5 Verbindungslinien zu anderen Ecken eingefügt. Es gibt also immer eine geeignete Farbe für die neu eingefügte Ecke.

Nachdem alle Ecken wieder eingefügt wurden, haben wir den ursprünglichen Graphen mit einer geeigneten Färbung von 6 Farben erhalten.