MSG Zirkel 7c – Hausaufgaben
vom 11.05.2017 zum 18.05.2017
Daniel Platt – www.math.hu-berlin.de/~plattd

In einem Zirkel ausgegebene Hausaufgaben können im jeweils nächsten Zirkel bearbeitet abgegeben werden. Ihr erhaltet eine Korrektur im darauffolgenden Zirkel. Bitte beachtet folgende Hinweise:

(i) Die Richtigkeit jedes Ergebnisses muss bewiesen werden. Falls eine Rechnung durchgeführt wird, gehört dazu auch eine Erklärung, was gerechnet wird.

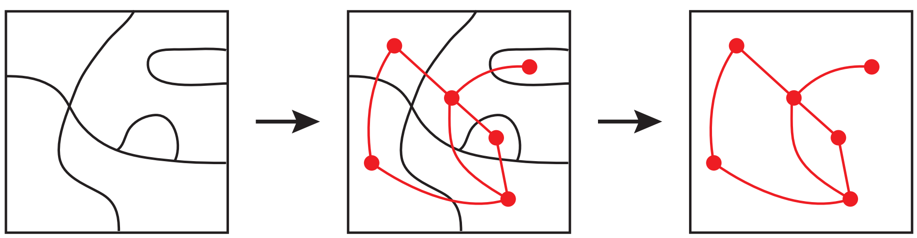
(ii) Beschriftet jedes Blatt, das ihr abgebt, mit eurem Namen. (Zu eurem Namen gehört mindestens ein Vorname und mindestens ein Nachname!)

(iii) Falls ihr mehr als ein Blatt abgebt, so heftet diese zusammen.

- Aufgabe 53 (10 Punkte):

  Ziel dieser Aufgabe ist es, den *6-Farbensatz* zu beweisen.

  (a) Gegeben sei ein planarer Graph. Man erhält daraus den dualen Graphen, indem man jedes Gebiet durch eine Ecke ersetzt und zwei Ecken durch eine Kante verbindet, falls im ursprünglichen Graphen die Gebiete benachbart waren. Ein Beispiel des Übergangs vom Graphen zu seinem dualen Graphen ist im Folgenden abgebildet:

  Zeige, dass ein dualer Graph zu einem beliebigen planaren Graph keine Einecke und Zweiecke hat. Welche Beziehung zwischen Eckenzahl und Kantenzahl gilt in solchen Graphen? (Du kannst ohne Beweis benutzen, dass der duale Graph eines planaren Graphen selbst planar ist)

  (b) Beweise die folgende Behauptung:

  Im dualen Graphen zu einem planaren Graphen gibt es immer eine Ecke mit Eckengrad < 6.

  Hinweis: Beweise durch Widerspruch und benutze Teil (a).

  (c) Beweise nun die folgende Behauptung:

  In einem dualen Graphen zu einem planaren Graphen kann man die Ecken so mit sechs Farben färben, dass je zwei Ecken, die durch eine Kante miteinander verbunden sind, verschiedene Farben haben.

  Hinweis: Gegeben den dualen Graphen, entferne nach und nach Ecken mit Eckengrad < 6, bis nur noch 6 Ecken übrig sind. (Warum geht das?) Diesen Graphen kann man mit 6 Farben färben. Was kann man nun sagen, wenn man das Entfernen der Ecken Schritt für Schritt rückgängig macht?