Aufgabe 54 (8 Punkte):
Gegeben ist die folgende Definition: *Ein Viereck heißt Parallelogramm, wenn gegenüberliegende Seiten parallel sind.*

(a) Zeige, dass die folgende Beschreibung eine äquivalente Charakterisierung von Parallelogrammen ist. D.h.: Wenn ein Viereck die folgende Beschreibung erfüllt, dann ist es ein Parallelogramm. Und wenn ein Viereck ein Parallelogramm ist, dann erfüllt es die folgende Beschreibung.

Gegenüberliegende Seiten haben die gleiche Länge.

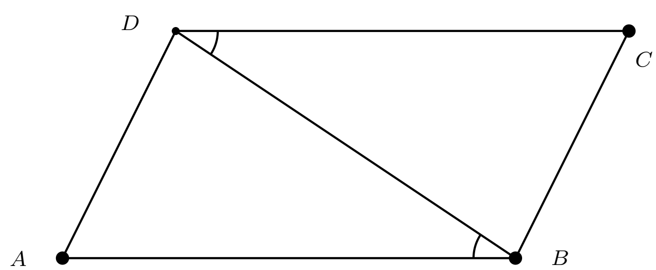
(b) Entscheide, ob die folgenden Beschreibungen äquivalente Charakterisierungen von Parallelogrammen sind oder nicht. Gib dafür an, ob die folgenden Bedingungen notwending, hinreichend oder beides für das Vorliegen eines Parallelogramms sind. (D.h. gilt "Parallelogramm $\Rightarrow$ Bedingung" oder "Bedingung $\Rightarrow$ Parallelogramm" oder beides?) Ein Beweis ist hierbei nicht nötig!

(i) *Benachbarte Winkel ergänzen sich zu* $180°$.

(ii) *Es existieren zwei Paare benachbarter Winkel, die sich zu* $180°$ *ergänzen.*

(iii) *Die Diagonalen halbieren sich und haben die gleiche Länge.*

(a) Betrachte ein Viereck $ABCD$:



"$\Rightarrow$": Wir zeigen zunächst: Wenn das Viereck ein Parallelogramm ist, dann haben gegenüberliegende Seiten die gleiche Länge.

Weil $AB \mid\mid CD$, gilt $\angle DBA = \angle BDC$ (Wechselwinkel). Analog gilt auch $\angle ADB = \angle CBD$. Folglich sind ΔABD und ΔBCD kongruent ("WSW"), also auch $\left|\overline{CD}\right| = \left|\overline{AB}\right|$ und $\left|\overline{BC}\right| = \left|\overline{AD}\right|$.

"$\Leftarrow$": Wir zeigen nun die Umkehrung.

Wegen $\left|\overline{CD}\right| = \left|\overline{AB}\right|$ und $\left|\overline{BC}\right| = \left|\overline{AD}\right|$ sind ΔABD und ΔBCD kongruent ("SSS").

Folglich gilt auch $\angle DBA = \angle BDC$. Das kann nur gelten, wenn $AB \mid\mid CD$. Analog erhalten wir auch $BC \mid\mid AD$.

(b) (i) Die Beschreibung ist äquivalent zur Definition.

(ii) Die Beschreibung ist *nicht* äquivalent zur Definition.

Es gilt: Wenn ein Viereck ein Parallelogramm ist, dann existieren zwei Paare benachbarter Winkel, die sich zu $180°$ ergänzen.

Es gilt nicht: Wenn zwei Paare benachbarter Winkel existieren, die sich zu $180°$ ergänzen, dann ist das Viereck ein Parallelogramm. (Ein Trapez, das kein Parallelogramm ist, kann hier als Gegenbeispiel dienen)

(iii) Die Beschreibung ist *nicht* äquivalent zur Definition.

Es gilt nicht: Wenn ein Viereck ein Parallelogramm ist, dann halbieren sich die Diagonalen und haben die gleiche Länge. (Als Gegenbeispiel dient zum Beispiel das in (a) gezeichnete Parallelogramm. Dort halbieren sich die Diagonalen, sie haben aber unterschiedliche Länge)

Es gilt: Wenn sich die Diagonalen halbieren und die gleiche Länge haben, dann ist das Viereck ein Parallelogramm.

Aufgabe 55$*$ (4 Zusatzpunkte):
In den 7. Klassen des Leonhard-Euler-Gymnasiums gibt es insgesamt 102 Schüler. Jeder dieser Schüler ist via Facebook mit mindestens 68 anderen Schülern der gleichen Klassenstufe befreundet. Beweise, dass es mindestens vier Schuler geben muss, die die gleiche Anzahl an Facebookfreunden haben.

Angenommen, es gibt keine vier Schüler, die die gleiche Anzahl an Freunden haben.

Es gibt $102 - 68 = 34$ mögliche Freundesanzahlen, nämlich die Zahlen $68, 69, \ldots, 100, 101$. Damit keine Freundesanzahl viermal vorkommt, muss jede Freundesanzahl genau dreimal vorkommen, weil $3 \cdot 34 = 102$.

Wir berechnen nun die Anzahl der Freundschaften insgesamt: Dazu summieren wir zunächst die Freundesanzahlen aller Schüler. Dabei zählen wir aber jede Freundschaft doppelt, wir müssen die Summe also noch durch zwei teilen. Damit erhalten wir:

$$3 \cdot (68 + 69 + \cdots + 100 + 101) \cdot \frac{1}{2} = \frac{2873}{2},$$

was keine ganze Zahl ist. Die Gesamtzahl an Freundschaften muss aber eine ganze Zahl sein, was daher ein Widerspruch ist.