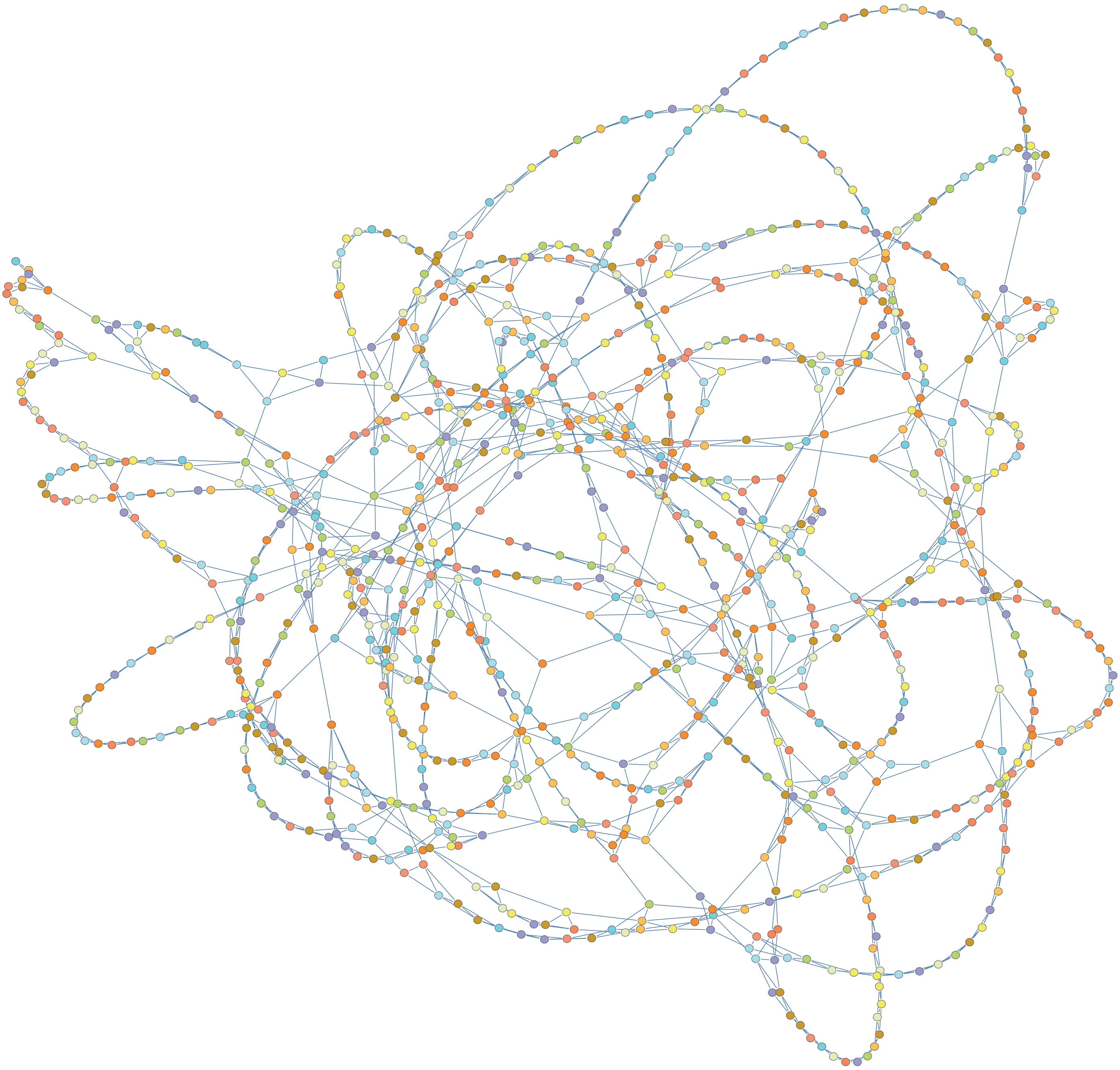
Daniel Platt

Einführung in die Graphentheorie



Für die **Mathematische Schülergesellschaft "Leonhard Euler"**
Humboldt–Universität zu Berlin, Institut für Mathematik

Das vorliegende Skript beschäftigt sich mit dem Thema *Graphentheorie*. Das Skript entsteht entlang einer Unterrichtsreihe in der Mathematischen Schülergesellschaft (MSG) im Jahr 2013. (letzte Änderung: 07.07.2016)

Für Rückmeldungen jeder Art und insbesondere Hinweise auf Fehler bin ich sehr dankbar – am liebsten per E-Mail an plattd@math.hu-berlin.de.

Zur weiteren Vertiefung ins Thema bieten sich die folgenden zwei Bücher an:

1. *Graphen für Einsteiger: Rund um Das Haus vom Nikolaus*, Manfred Nitzsche, Vieweg+Teubner Verlag, 3. überarbeitete und erweiterte Auflage, 2009

2. *Graphentheorie*, Reinhard Diestel, Springer Verlag, 4. Auflage, 2012

Dabei behandelt das erste Buch (Nitzsche) die Graphentheorie sehr anschaulich. Viele Begriffe werden dabei nicht mathematisch formalisiert. Das Buch ist damit diesem vorliegenden Skript ähnlich.

Das zweite Buch (Diestel) behandelt die Graphentheorie streng mathematisch und sehr präzise. Dies ist ein ganz anderer Ansatz als im hier vorliegenden Skript. Er mag am Anfang gewöhnungsbedürftig erscheinen; man kann dadurch allerdings auch viele tiefliegende Sätze über Graphen formulieren und beweisen, die allein durch die Anschauung nicht sinnvoll zu fassen sind. (Zum Beispiel: Wann sind zwei Graphen gleich?)

Inhaltsverzeichnis

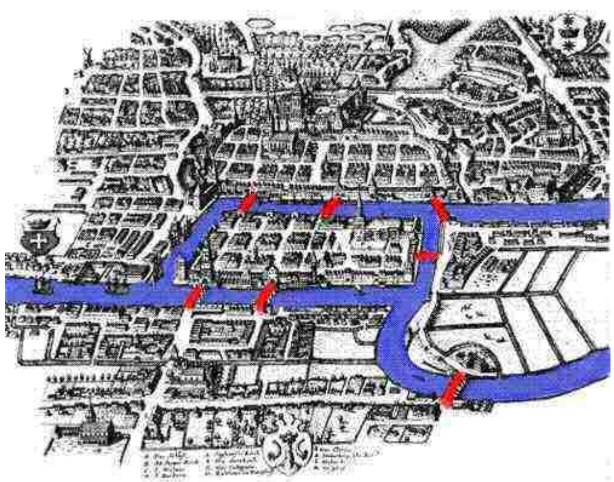
1 Einstieg und wichtige Begriffe

Die Graphentheorie ist ein Gebiet der Mathematik, in dem *Graphen* untersucht werden. Graphen sind Objekte, die aus Punkten und aus Linien, die diese Punkte miteinander verbinden, bestehen. Beispiele für Graphen sind das Berliner U-Bahnnetz, das Haus vom Nikolaus oder auch die Datenstruktur Baum, die in der Informatik verwendet wird.

Wir werden auf den folgenden Seiten noch weitere Bespiele kennenlernen und auch den Begriff des Graphen präziser formulieren. Als Einstieg betrachten wir das klassische Problem der Graphentheorie schlechthin: Das Königsberger Brückenproblem. Leonhard Euler löste das Problem im Jahr 1736 und begründete damit die Graphentheorie.

1.1 Das Königsberger Brückenproblem

Durch die schöne Stadt Königsberg (heute Kaliningrad) fließt der Fluss Pregel. Dabei schließt der Fluss zwei Inseln ein. Zur ersten Insel führen je zwei Brücken von den beiden Flussseiten, zur zweiten Insel je eine. Außerdem sind beide Inseln durch eine Brücke verbunden.



Aus dem 18. Jahrhundert stammt die folgende Aufgabe:

1. Finde einen Spazierweg, bei dem man jede Brücke über den Pregel genau einmal überquert oder zeige, dass ein solcher Spazierweg nicht existiert.

2. Prüfe, ob ein Rundweg möglich ist, bei dem Start- und Endpunkt derselbe sind.

Lösungen:

1. Ein solcher Spazierweg existiert nicht.

   Beweis. Angenommen, so ein Spazierweg existiert. Dann beginnt dieser Spazierweg in einem ersten Punkt und endet in einem zweiten Punkt (die beiden Punkte können gleich sein). In seiner Mitte enthält der Spazierweg irgendwo einen Stadtteil, der nicht Startpunkt und nicht Endpunkt ist. Wir nenne diesen Stadtteil X. Wir stellen fest: Von X geht eine ungerade Anzahl von Brücken ab. Das heißt: Wenn wir X zum ersten Mal betreten, so können wir X über eine freie Brücke verlassen. Danach sind allerdings zwei Brücken *verbraucht*. Früher oder später wird der Spazierweg also in einem Stadtteil ankommen, der nicht X ist, während zu X noch genau eine unverbrauchte Brücke führt.

   Während unseres Spaziergangs müssen wir auch diese Brücke noch betreten. Wenn wir dies tun, so gelangen wir zwar nach X, aber nicht mehr von X weg. Der Spazierweg muss also in X enden.

   Doch das kann nicht sein, schließlich hatten wir ja X extra so gewählt, dass der Spazierweg *nicht* in X endet. Das ist ein Widerspruch. Also war unsere Annahme falsch und so ein Spazierweg kann nicht existieren. □

2. Ein solcher Rundweg existiert nicht.

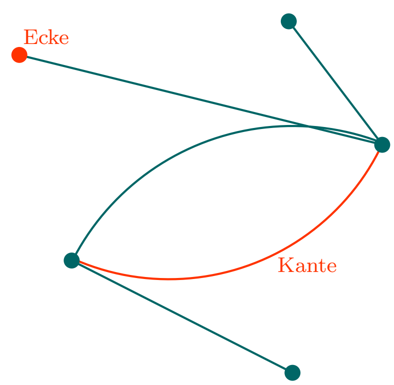
   Beweis. Ein solcher Rundweg ist insbesondere ein Spazierweg nach Aufgabe 1., nur dass noch eine Zusatzforderung gestellt wird. Wir wissen aber bereits, dass kein Spazierweg nach Aufgabe 1. existiert, also existiert erst recht kein Rundweg. □

1.2 Wichtige Begriffe

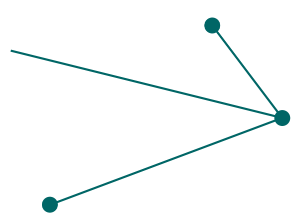
Definition 1. *Ein Bild aus Punkten und Linien heißt* Graph*, wenn jede Linie genau zwei Punkte miteinander verbindet. Wir nennen die Linien auch* Kanten *und die Punkte auch* Ecken*.*

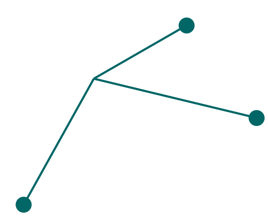
Eine Kante, bei der Startpunkt und Endpunkt übereinstimmen, heißt Schlinge*.*

So ist das folgende Bild zum Beispiel ein Graph. Dort wurden eine Ecke und eine Kante markiert.



Die folgenden Beispiele sind keine Graphen. Im linken Bespiel gibt es eine Linie, die von einem Punkt aus ins Nichts zeigt, also nicht zwei Punkte miteinander verbindet. Im rechten Beispiel gibt es eine Linie, die drei Punkte miteinander verbindet:



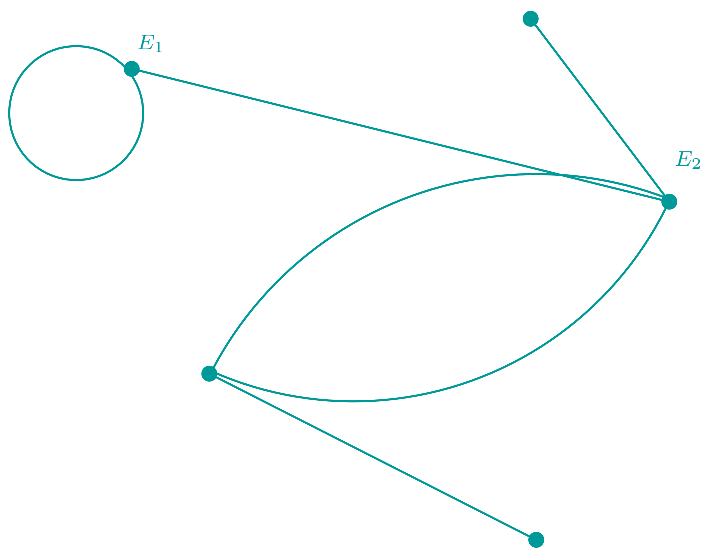


Der absolut zentrale Begriff der Graphentheorie ist der *Grad* einer Ecke. Mit diesem Begriff kann man auch den vorigen Beweis zum Königsberger Brückenproblem sehr viel leichter formulieren.

Definition 2. *Gegeben sei eine Ecke F in einem Graphen. Der* Grad *von F (Symbol: $grad(F)$) ist die Anzahl von Kanten, die von F ausgehen. (Dabei erhöht eine Schlinge in einer Ecke den Grad dieser Ecke um 2)*

Die Summe der Grade aller Ecken heißt Gesamtgrad des Graphen.

Im folgenden Graphen gilt zum Beispiel $grad(E_1) = 3$ und $grad(E_2) = 4$. Der Gesamtgrad dieses Graphen beträgt 12:



1.3 Aufgaben

1.1) Zusatz zum Königsberger Brückenproblem:

   a) Die Stadtverwaltung möchte eine Brücke einreißen, sodass ein Spazierweg möglich wird, der jede Brücke genau einmal überquert. Welche Brücke kann eingerissen werden, um dies zu erreichen?

   b) Die Stadtverwaltung möchte eine weitere Brücke errichten, sodass ein Spazierweg mit obiger Forderung entsteht.

   c) Die Stadtverwaltung ist bereit, mehrere neue Brücken zu errichten, sodass ein Rundkurs-Spazierweg entsteht, bei dem jede Brücke genau einmal überquert wird. Wieviele Brücken müssen mindestens errichtet werden?

1.2) Im Folgenden sollen Graphen mit 5 Ecken gezeichnet werden, die A, B, C, D und E heißen. Wenn so ein Graph existiert, zeichne ihn. Ist er eindeutig? Wenn nicht, so zeige, warum kein solcher Graph existieren kann.

   a) $grad(A) = 2$, $grad(B) = 3$, $grad(C) = 2$, $grad(D) = 3$, $grad(E) = 3$.

   b) $grad(A) = 2$, $grad(B) = 3$, $grad(C) = 2$, $grad(D) = 3$, $grad(E) = 4$.

1.3) Zeige: Der Gesamtgrad eines beliebigen Graphen ist eine gerade Zahl.

1.4) In einem Teil von Deutschland liegen 20 kleine Dörfer, die jeweils wenige Kilometer voneinander entefernt sind. Es soll von jedem Dorf zu jedem anderen eine Fiberglasverbindung gelegt werden.

   Betrachte das Fiberglasnetz in dieser Gegend als Graph.

   a) Welchen Grad hat jede Ecke in diesem Graph?

   b) Wie viele Leitungen müssen gelegt werden?

1.5*) Es sei $n \in \mathbb{N}$ irgendeine natürliche Zahl. Ein Graph heißt *vollständiger n-Ecksgraph*, wenn er genau n Ecken hat und jede Ecke mit jeder anderen durch genau eine Kante verbunden ist.

a) Gib eine Formel für die Anzahl von Kanten in einem vollständigen n-Ecksgraphen an (für beliebiges n).

b) Benutze das Ergebnis aus Teil (a), um eine Formel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen zu finden. Also

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = ?$$

Damit ist gemeint, eine Formel zu finden, in der kein ... mehr vorkommt.

2 Eulerkreise und Eulerwege

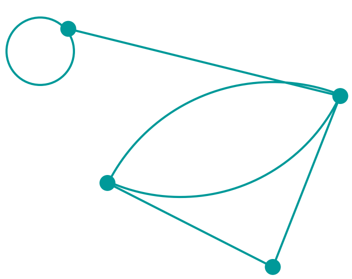
Häufig möchten wir herausfinden, ob wir einen Graphen durchlaufen können, sodass wir jede Kante genau einmal besuchen. Das war zum Beispiel der Fall beim Königsberger Brückenproblem aus dem letzten Abschnitt. Die Frage ist aber auch vom *Haus vom Nikolaus* bekannt. Ziel dieses Abschnitts ist es, ein Kriterium zu finden, mit dessen Hilfe man einem Graphen sofort ansehen kann, ob er auf diese Art durchlaufbar ist, oder nicht.

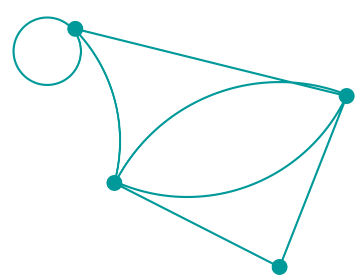
Um über diesen Sachverhalt leichter sprechen zu können, definieren wir:

Definition 3.

1. *Ein Kantenzug in einem Graphen, bei dem jede Kante* genau einmal *durchlaufen wird, heißt* Eulerweg.
2. *Ein Eulerweg, bei dem Start- und Endpunkt derselbe Punkt sind, heißt* Eulerkreis.

Im folgenden Beispiel enthält zum Beispiel der linke Graph einen Eulerweg, aber keinen Eulerkreis. Der rechte enthält einen Eulerkreis und damit natürlich sofort auch einen Eulerweg:





Zunächst mal fällt uns auf: Wenn ein Graph aus mehr als nur einem Teil besteht, dann kann dieser Graph mit Sicherheit keinen Eulerweg oder Eulerkreis enthalten. Zur Vereinfachung betrachten wir daher in diesem Abschnitt immer Graphen, die aus nur einem Teil bestehen. Solche Graphen nennen wir auch *zusammenhängend*:

Definition 4. *Ein Graph, in dem je zwei beliebige Ecken durch einen Kantenzug miteinander verbunden sind, heißt* zusammenhängend.

So ist im im Folgenden Beispiel der linke Graph zusammenhängend, der rechte aber nicht:

Wir kommen nun zum zentralen Satz über Eulerkreise. Dieser Satz gibt uns genau an, welche Graphen Eulerkreise enthalten und welche Graphen nicht:
Satz 1. *Es sei G ein zusammenhängender Graph. Dann gilt:*

$$G \text{ enthält einen Eulerkreis} \Longleftrightarrow \text{Alle Ecken in } G \text{ haben geraden Grad}$$

Beweis. Wir beweisen den Satz in zwei Schritten. Zuerst beweisen wir "$\Longrightarrow$", also die Aussage:

$$G \text{ enthält einen Eulerkreis} \Longrightarrow \text{Alle Ecken in } G \text{ haben geraden Grad}$$

Es sei E irgendeine Ecke im Graph G. Wir möchten nun zeigen, dass $grad(E)$ eine gerade Zahl ist. Wenn zu E mindestens eine Kante führt, dann enthält der Eulerkreis in G auch die Ecke E. Wenn man nun den Eulerkreis durchläuft, dann betritt man E genauso häufig, wie man E wieder verlässt.

Würde man nämlich E häufiger betreten als verlassen, so würde das heißen, dass der Eulerkreis in E endet und in einem anderen Punkt beginnt. Doch dann wären ja Start- und Endpunkt des Eulerkreises verschieden. Aus dem gleichen Grund ist unmöglich, dass man E häufiger verlässt als betritt.

Also betritt man tatsächlich E genauso häufig, wie man E wieder verlässt. Wenn man nun E gerade x-mal betritt und x-mal verlässt, so führen also $(2 \cdot x)$ Kanten nach E. Also ist $grad(E) = 2x$, und $2x$ ist eine gerade Zahl.

Dabei war E eine beliebig gewählte Ecke. Also ist der Grad jeder Ecke eine gerade Zahl.

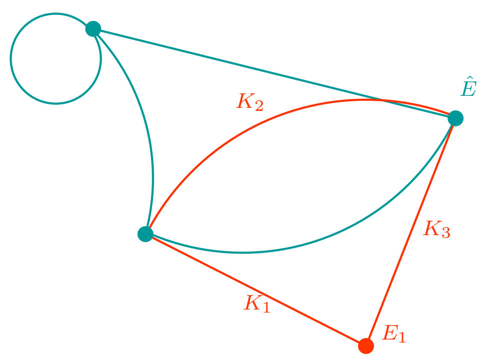
Wir zeigen nun die Rückrichtung "$\Longleftarrow$". Also die Aussage:

$$\text{Alle Ecken in } G \text{ haben geraden Grad} \Longrightarrow G \text{ enthält einen Eulerkreis}$$

Wir werden hierzu einen Algorithmus angeben, durch den wir mit Sicherheit einen Eulerkreis in G konstruieren. Im folgenden bezeichnen wir Ecken mit E_1, E_2, ... und Kanten mit K_1, K_2, ...

(1) Wähle irgendeine beliebige Ecke in G. Wir nennen diese Ecke E_1.

(2) Wir durchlaufen von E_1 aus einen Weg $(K_1, K_2, \ldots, K_n)$ und fügen so lange Kanten an, bis wir eine Ecke erreichen, von der aus keine unbenutzte Kante mehr abgeht. Der Name diese Ecke sei E_2.



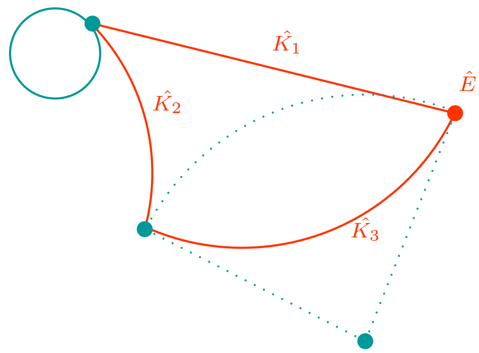
Es muss $E_1 = E_2$ sein, denn: Wenn unser Weg eine andere Ecke E_3 erreicht, so können wir diese Ecke auch wieder verlassen. Schließlich ist ja der Grad von E_3 gerade!

(3) Wir haben nun also einen Weg $(K_1, K_2, \ldots, K_n)$ gefunden, der in E_1 startet und endet.

(I) Falls wir mit unserem Weg $(K_1, K_2, \ldots, K_n)$ bereits den ganzen Graphen durchlaufen haben, so ist das der gesuchte Eulerkreis. G enthält also diesen Eulerkreis!

(II) Falls wir mit unserem Weg $(K_1, K_2, \ldots, K_n)$ noch nicht den ganzen Graphen durchlaufen haben, so gibt es noch irgendwo auf unserem Weg eine Ecke $\hat{E}$, von der aus noch frei Kanten ausgehen.

Zieht man vom gesamten Graphen G den bisher gelaufenen Weg ab, so hängt an $\hat{E}$ ein Teilgraph, in dem wieder alle Ecken geraden Grad haben. Nach der Überlegung aus dem zweiten Schritt existiert auch dort ein Weg $(\hat{K}_1, \hat{K}_2, \ldots, \hat{K}_k)$, der in $\hat{E}$ startet und endet.



Wir fügen nun beide Wege zusammen: Der entstandene Weg

$$(K_1, K_2, \ldots, K_i, \tilde{K}_1, \tilde{K}_2, \ldots, \tilde{K}_k, K_{i+1}, \ldots K_n)$$

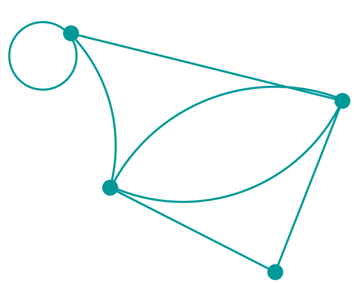
hat als Start- und Endpunkt immer noch E_1, ist aber ein bisschen länger als der erste Weg.

(4) Wiederholt man den vorigen Schritt oft genug, so erreicht man irgendwann einen Weg, in dem alle Kanten verwendet werden. Dieser Weg ist der gesuchte Eulerkreis.

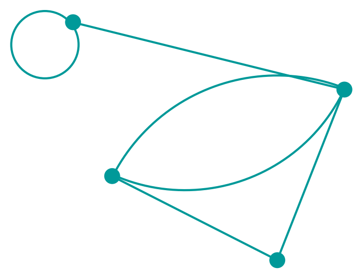
Also enthält G einen Eulerkreis.

□

Das heißt, wir können nun einem Graphen auf den ersten Blick ansehen, ob er einen Eulerkreis enthält, oder nicht. So sehen wir zum Beispiel: Der folgende Graph ist zusammenhängend und jede Ecke hat geraden Grad. Also enthält der Graph einen Eulerkreis (wegen Richtung "$\Longleftarrow$" im obigen Satz):



Analog sehen wir: Im folgenden Graphen hat eine Ecke ungeraden Grad. Würde dieser Graph einen Eulerkreis enthalten enthalten, so müsste jede Ecke geraden Grad haben (wegen Richtung "$\Longrightarrow$" im obigen Satz). Also kann der Graph keinen Eulerkreis enthalten:



In vielen Fällen enthält ein Graph zwar keinen Eulerkreis, aber zumindest noch einen Eulerweg. Wir werden nun noch ein Kriterium dafür angeben, ob ein Graph einen Eulerweg enthält, oder nicht. Dabei werden wir das Ergebnis aus dem vorigen Satz verwenden.

Satz 2. *Es sei G ein zusammenhängender Graph. Dann gilt:*

$$G \text{ enthält einen Eulerweg} \Longleftrightarrow \text{Höchstens zwei Ecken von } G \text{ haben ungeraden Grad}$$

Beweis. Wir beweisen wieder beide Richtungen getrennt voneinander. Zunächst beweisen wir "$\Longrightarrow$":

G enthält also einen Eulerweg. Wir bezeichnen mit E_1 und E_2 die Ecken, in denen der Eulerweg startet bzw. endet. Dabei ist es möglich, dass $E_1 = E_2$, falls nämlich der Eulerweg ein Eulerkreis ist. Das ist aber kein Problem für den restlichen Beweis.

Wir fügen nun in den Graphen G eine zusätzliche Kante ein. Diese Kante soll E_1 und E_2 verbinden. (Falls $E_1 = E_2$, dann ist die neue Kante eine Schlinge) Den neuen Graphen, den wir dadurch erhalten, nennen wir G'.

Dann gilt: G' enthält einen Eulerkreis. Denn: Wenn wir an den Eulerweg aus G die neue Kante anhängen, so erhalten wir einen Kantenzug, der jede Kante von G' enthält und geschlossen ist. Also erhalten wir dadurch einen Eulerkreis in G'.

Damit wissen wir nach Satz 1: Im Graphen G' hat jede Ecke geraden Grad. Weiter wissen wir: Im Graphen G haben alle Ecke denselben Grad wie in G', mit Ausnahme von höchstens zwei Ecken. Es kann also höchstens zwei Ecken in G geben, die ungeraden Grad haben.

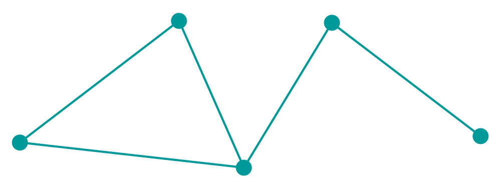
"$\Longleftarrow$"

Es sei G also ein Graph, in dem höchstens zwei Ecken ungeraden Grad haben. Wir stellen zunächst fest: Es ist nicht möglich, dass in G genau eine Ecke ungeraden Grad hat. Dann wäre nämlich der Gesamtgrad von G eine ungerade Zahl. Das kann aber nach Aufgabe (1.3) nicht sein. Also gibt es nur die zwei Fälle, dass entweder keine Ecke ungeraden Grad hat, oder genau zwei Ecken ungeraden Grad haben. Wir behandeln diese beiden Fälle nacheinander und zeigen, dass es in beiden Fällen einen Eulerweg gibt:

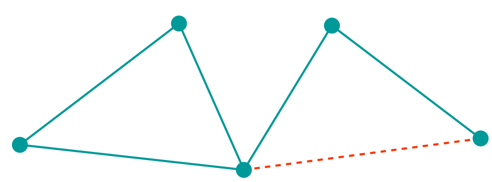
I. Fall: Keine Ecke in G hat ungeraden Grad.

   Damit enthält G nach Satz 1 einen Eulerkreis. Dieser Eulerkreis ist insbesondere auch ein Eulerweg. Also enthält G einen Eulerweg.

II. Fall: Genau zwei Ecken in G haben ungeraden Grad. Dies ist zum Beispiel in folgendem Graphen der Fall:



   Es seien E_1 und E_2 die beiden Ecken mit ungeradem Grad. Wir fügen nun in den Graphen G eine Kante zwischen den Ecken E_1 und E_2 ein; wir nennen den neuen Graphen, den wir dadurch erhalten, den Graphen G'.



   Wir wissen nun: In G' haben die beiden Ecken E_1 und E_2 geraden Grad. Denn ihr Grad ist um 1 höher als in G und in G war ihr Grad eine ungerade Zahl. Alle übrigen Ecken in G' und haben den gleichen Grad wie in G – und dieser war gerade.

   Also haben in G' alle Ecken geraden Grad. Nach Satz 1 existiert dann ein Eulerkreis in G'. Aus diesem Eulerkreis entfernen wir die neu eingefügte Kante zwischen E_1 und E_2. Übrig bleibt ein Kantenzug in G', der jede Kante bis auf die neu hinzugefügte Kante genau einmal enthält. Dieser Kantenzug ist in G dann gerade ein Eulerweg.

Also enthält G in beiden Fällen einen Eulerweg. $\square$

2.1 Aufgaben

2.1) Gegeben sind die folgenden Häuser des Nikolaus'. Welche davon sind unter den üblichen Bedingungen zeichenbar? *Unter den üblichen Bedingungen* bedeutet:

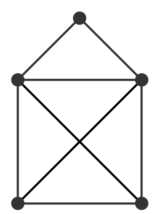
i.) Der Stift darf nicht abgesetzt werden.

ii.) Keine Kante darf doppelt gezeichnet weren.

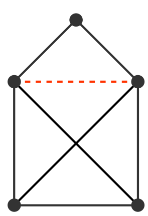
iii.) Nur an den markierten Ecken des Hauses darf die Richtung gewechselt werden.

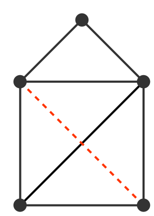
Gib entweder eine mögliche Zeichenvorschrift an oder begründe, warum die Zeichnung nicht möglich ist.

a) Das klassische Haus des Nikolaus':

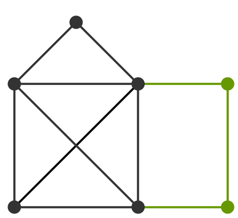


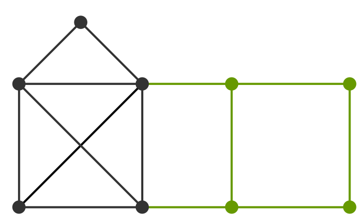
b) Der Nikolaus muss sparen, sein Haus ist leider in schlechtem Zustand und ein Strich fehlt:





c) Der Nikolaus hat die Krise überwunden und konnte anbauen! Zuerst nur einen kleinen Schuppen, danach dann noch einen großen Schuppen!





2.2) Zeige: In der Situation des Königsberger Brückenproblems müssen mindestens zwei zusätzliche Brücken errichtet werden, sodass ein Rundkurs möglich wird.

2.3) In einem entlegenen Teil von Deutschland liegen die n verschiedenen Städte A_1, A_2, $\ldots$, A_n. Von jeder Stadt zu jeder anderen führt genau eine Straße, ansonsten gibt es in diesem Teil Deutschlands keine weiteren Straßen.

Es ist Winter in Deutschland und ein Räumunternehmen möchte von A_1 aus starten, um alle Straßen zu räumen. Kann das Räumunternehmen in einer Fahrt alle Straßen räumen, ohne eine Straße doppelt zu befahren, sodass der Räumfahrer am Ende wieder in A_1 eintrifft? Hängt die Antwort von n ab?

2.4) Wir betrachten einen vollständigen n-Ecksgraphen. Also einen Graphen mit n Ecken, in dem jede Ecke durch genau eine Kante mit jeder übrigen Ecke verbunden ist.

Enthält der Graph einen Eulerweg? Falls nein: Wie viele Kanten muss man mindestens hinzufügen, damit der Graph einen Eulerweg enthält? Beantworte die Frage in Abhängigkeit von n.

3 Die Eulersche Polyederformel

Bisher haben wir uns in einem Graphen nur für seine Ecken und Kanten interessiert. In diesem Abschnitt werden wir uns allerdings zusätzlich noch mit den *Gebieten* eines Graphen beschäftigen. Es ist sehr schwer, exakt zu definieren, was ein Gebiet denn nun sein soll. Wir verwenden den Begriff ganz anschaulich:

Definition 5. *Gegeben sei ein zusammenhängender Graph G, der in der Ebene gezeichnet ist, ohne dass Kanten sich schneiden. Ein* Gebiet *von G ist ein Teil der Ebene, der durch einen geschlossenen Kantenzug von G begrenzt wird und keinen anderen geschlossenen Kantenzug enthält.*

So der hat der folgende Graph zum Beispiel zwei verschiedene Gebiete:

(Randbemerkung: Der Begriff Gebiet wurde nur für *eine* Darstellung des Graphen in der Ebene definiert. Es ist nicht offensichtlich, warum jede andere Darstellung genauso viele Gebiete haben sollte. Tatsächlich gilt aber: Jede Darstellung desselben Graphen, in der sich keine Kanten schneiden, hat dieselbe Anzahl von Gebieten. Diese Tatsache wird hier nicht bewiesen, sondern klammheimlich vorausgesetzt.)

Wir können nun feststellen, dass die Anzahlen von Ecken, Kanten und Gebieten eines Graphen in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen:

Satz 3. *(Eulersche Polyederformel) Wenn G ein zusammenhängender Graph ist, der sich in der Ebene ohne sich schneidende Kanten zeichnen lässt, dann gilt:*

$$e - k + g = 2$$

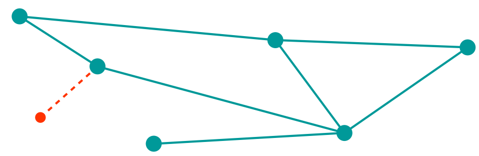
Wobei:

$$\begin{aligned} e &= \textit{Anzahl von Ecken in } G \\ k &= \textit{Anzahl von Kanten in } G \\ g &= \textit{Anzahl von Gebieten in } G \end{aligned}$$

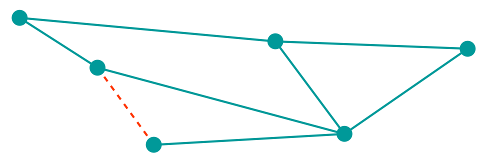
Beweis. Es sei G also wie in der Voraussetzung. Wir werden nun G schrittweise aufbauen und zeigen, dass in jedem Schritt die Gleichung aus der Behauptung erfüllt ist.

Beginnend mit einer einzigen Ecke, so können wir G mit den folgenden Operationen aufbauen:

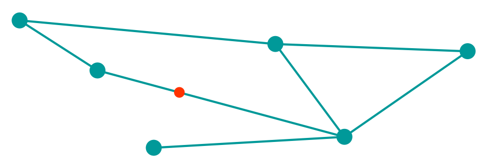
(I) Einfügen einer neuen Ecke und gleichzeitig einer Kante, die zu dieser Ecke führt.



(II) Einfügen einer neuer Kante, die zwei bestehende Ecken miteinander verbindet.



(III) Einfügen einer neuen Ecke auf einer bestehenden Kante.



Zu Anfang, wenn nur eine einzige Ecke vorhanden ist, gilt die Formel. Es ist in diesem Graphen nämlich $e = 1$, $k = 0$, $g = 1$. Also gilt tatsächlich $e - k + g = 1 - 0 + 1 = 2$.

Wir zeigen nun, dass die Beziehung zwischen Ecken, Kanten und Gebieten auch erhalten bleibt, wenn man mit den obigen Schritten den Graphen G aufbaut.

zu I: In diesem Fall werden e und k um 1 erhöht. Es kann bei dieser Aktion allerdings kein neues Gebiet entstehen, also bleibt g gleich. Und wenn vor dem Hinzufügen die Gleichung $e - k + g = 2$ galt, dann gilt die Gleichung auch noch nach dem Hinzufügen. Denn zwar ist e dann größer, es wird jedoch durch das vergrößerte k wieder ausgeglichen.

zu II: In diesem Fall verändert sich e nicht, jedoch werden g und k um 1 erhöht. Wie bei (I) sehen wir, dass auch hier nach dem Hinzufügen noch die Gleichung gilt.

zu III: In diesem Fall verändert sich g nicht. Nur e und k werden um 1 erhöht. Wieder sehen wir, dass auch nach dem Hinzufügen noch die Gleichung gilt.

Wenn wir von einer einzigen Ecke ausgehen und G aufbauen und dabei beliebig oft die obigen Schritte durchführen, dann gilt in jedem Schritt die Beziehung $e - k + g = 2$. Insbesondere gilt nach dem letzten Schritt, in dem wir G erhalten, noch $e - k + g = 2$. Also gilt für G gerade diese Gleichung.

$\square$

Dieses Ergebnis ist sehr wichtig. Wir werden es später noch dazu verwenden, um zu untersuchen, ob man jeden Graphen in der Ebene ohne sich schneidende Kanten zeichnen kann.

(Randbemerkung: Auch für die höhere Mathematik ist dieser Satz interessant: Überdeckt man nämlich die Oberfläche irgendeines Körpers durch ein Netz von Dreiecken, so gilt manchmal die Gleichung $e - k + g = 2$, zum Beispiel bei der Kugel. In anderen Fällen erhält man $e - k + g = 0$ oder ähnliches, zum Beispiel bei einem Torus. An dieser einfachen Gleichung kann man dem Körper viele weitere Eigenschaften ansehen. Dieses Thema wird unter dem Stichwort *Euler-Charakteristik* behandelt.)

3.1 Aufgaben

3.1) In unserer Definition von Gebiet haben wir gefordert, dass man den Graphen ohne sich schneidende Kanten zeichnen kann. Unsere Definition könnten wir allerdings auch für Graphen mit sich schneidenden Kanten anwenden. Dies ist aber nicht sinnvoll, weil dann die Anzahl von Gebieten je nach Darstellung unterschiedlich ist.

Finde einen Graphen (mit sich kreuzenden Kanten), dessen Anzahl von Gebieten je nach Darstellung unterschiedlich ist.

3.2) (a) Ein zusammenhängender Graph G habe 3 Gebiete und 4 Ecken. Wie viele Kanten hat der Graph? Sind hierfür mehrere Anzahlen möglich?

(b) Ein zusammenhängender Graph G habe 4 Kanten und 3 Ecken. Wie viele Gebiete hat der Graph? Ist diese Anzahl eindeutig, oder hängt sie davon ab, wie Ecken und Kanten eingezeichnet werden?

3.3) (a) Ein zusammenhängender Graph G habe 3 Gebiete, 2 Ecken und 5 Kanten. Kann es so einen Graphen geben? Wenn ja: Prüfe, ob er eindeutig ist. Wenn nein: Zeige, dass es so einen Graphen nicht geben kann.

(b) Ein zusammenhängender Graph G habe 4 Gebiete, 4 Ecken und 6 Kanten. Kann es so einen Graphen geben? Wenn ja: Prüfe, ob er eindeutig ist. Wenn nein: Zeige, dass es so einen Graphen nicht geben kann.

(c) Es sei $n \in \mathbb{N}$ irgendeine natürliche Zahl. Gibt es einen Graphen mit n Ecken, n Kanten und n Gebieten geben? Hängt die Antwort von n ab?

3.4) Für die Eulersche Polyederformel wird gefordert, dass der betreffende Graph zusammenhängend ist.

(a) Zeige, dass die Formel im Allgemeinen für nicht-zusammenhängende Graphen nicht gilt. (Also gib ein Beispiel an, für das sie nicht gilt)

(b) Kann es überhaupt einen nicht-zusammenhängenden Graphen geben, in dem die Eulersche Polyederformel gilt? Beweise deine Antwort.

(c) Für einen Graphen sei c die Anzahl von zusammenhängenden Teilen, aus denen er besteht. (Zum Beispiel gilt also in einem zusammenhängenden Graphen $c = 1$.) Finde eine Erweiterung der Eulerschen Polyederformel, in der auch c vorkommt, die auch für nicht-zusammenhängende Graphen gilt.

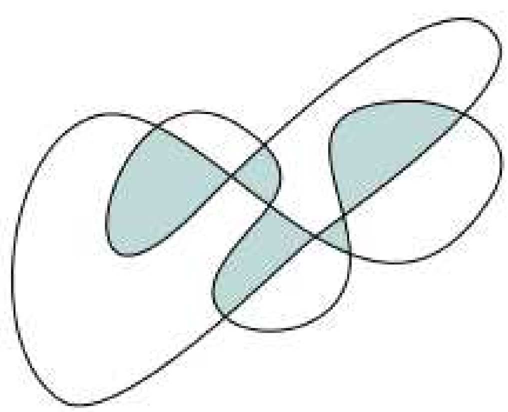
4 Färbungen von Graphen

In den vorigen Kapiteln haben wir die Grundbegriffe der Graphentheorie behandelt. Eine sehr große Klasse von Problemen und Sätzen haben wir allerdings bislang nicht behandelt: Färbungen von Graphen. An dieser Stelle möchten wir einen kurzen Blick auf zwei typische Probleme des Färbens von Graphen geben. In diesem Kapitel werden allerdings keine Aussagen bewiesen – dies könnte dann in einem zweiten Teil passieren.

4.1 Ein Zwei-Farben-Satz

Satz 4. *Gegeben sei eine Kurve in der Ebene, bei der keine Linien übereinander verlaufen. Die Kurve darf sich selbst schneiden. Dann teilt die Kurve die Ebene in mehrere Gebiete. Nun genügen in jedem Fall* zwei Farben*, um die Gebiete so einzufärben, dass zwei benachbarte Gebiete verschiedene Farben haben.*

So könnte zum Beispiel eine beispielhafte Kurve mit einer beispielhaften Färbung aussehen (in türkis und weiß gefärbt):

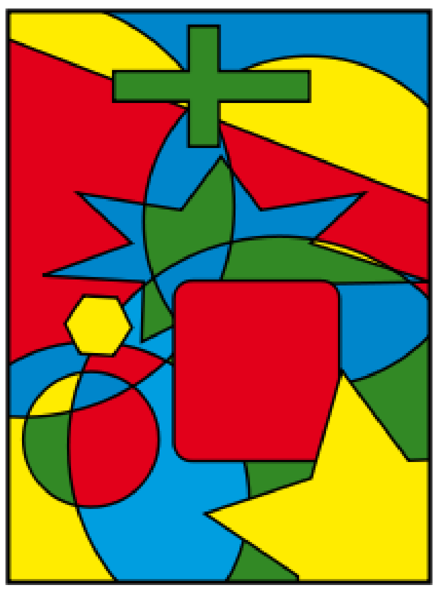


Um diesen Satz zu beweisen, werden wir zunächst der Zeichnung der Kurve einen Graphen zuordnen. Wir zeichnen nämlich in jedes durch die Kurve erzeugte Gebiet eine Ecke und verbinden zwei Ecken durch eine Kante, falls die zugehörigen Gebiete benachbart sind. Und für den so entstehenden Graphen können wir dann Kriterien für Färbbarkeit mit zwei Farben überprüfen.

4.2 Der Vier-Farben-Satz

Beim obigen Zwei-Farben-Satz haben wir Gebiete in der Ebene gefärbt, die auf eine besondere Art entstanden sind. Die folgende Frage liegt nun nahe: Gegeben beliebige Gebiete in der Ebene, wie viele Farben benötigt man, um diese derart zu Färben, dass benachbarte Gebiete verschiedene Farben haben? Kann es eine solche Anzahl überhaupt geben? Oder kann man nicht vielleicht die Gebiete so ungünstig wählen, dass sehr viele verschiedene Farben benötigt werden?

Im folgenden Fall genügen zum Beispiel vier Farben. Mit wenigern Farben wäre die gewünschte Färbung allerdings nicht zu schaffen (Bild von http://de.wikipedia.org/wiki/Vier-Farben-Satz):



Die überraschend einfache Antwort auf alle Fragen liefert der folgende Satz:

Satz 5. *Es seien beliebig geformte, beliebig viele Gebiete in der Ebene gegeben. Dann genügen vier Farben, um alle Gebiete derart einzufärben, dass benachbarte Gebiete verschiedene Farben haben.*

Die Vermutung wurde bereits um 1850 geäußert und diskutiert. Trotzdem dauerte es über 100 Jahre, bis Kenneth Appel und Wolfgang Haken im Jahr 1976 den ersten Beweis des Satzes lieferten. Dabei verwendeten sie einerseits typische Beweismethoden aus der Graphentheorie, aber auch Computerhilfe, mit der sie circa 2000 Spezialfälle untersuchten.

5 Plättbare Graphen

Wenn wir uns mit Graphen beschäftigt haben, haben wir immer Zeichnungen betrachtet, in denen sich keine Kanten kreuzen. Wir fragen uns nun: Kann man jeden Graphen zeichnen, ohne dass sich seine Kanten kreuzen? Tatsächlich ist dies nicht der Fall: Es gibt Graphen, die man nicht in der Ebene zeichnen kann, ohne dass Kanten sich kreuzen. Das Ziel dieses Abschnitts ist es, diese Aussage zu beweisen.

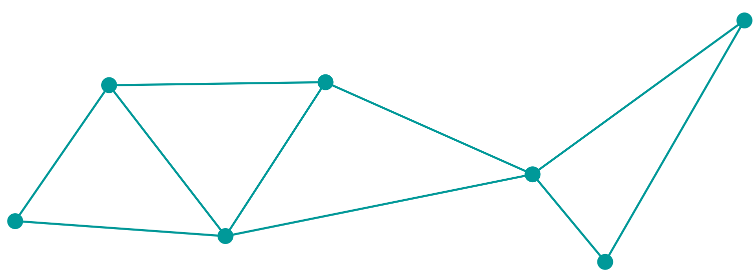
Satz 6. *Es sei G ein zusammenhängender Graph, der in der Ebene ohne sich kreuzende Kanten zeichenbar ist und mindestens ein Gebiet enthält. Weiter enthalte G keine Schlingen und keine Doppelkanten. (Eine Schlinge ist eine Kante, bei der Start- und Endpunkt übereinstimmen. Eine Doppelkante sind zwei Kanten, die dieselben Ecken miteinander verbinden) Es seien g, e und k die Anzahlen der Gebiete, Ecken bzw. Kanten von G.*

Dann gilt:

$$k \leq 3 \cdot e - 6$$

Beweis. Wir beweisen den Satz in zwei Schritten:

(I) Erster Fall: Jedes Gebiet von G, außer möglicherweise das Außegengebiet, ist durch genau 3 Kanten begrenzt. (Dies ist zum Beispiel in folgendem Graphen der Fall)



Es seien nun g und k die Anzahlen von Gebieten bzw. Kanten von G. Wir möchten nun k durch g ausdrücken.

Jedes Gebiet ist durch genau 3 Kanten begrenzt. Also muss $3g \geq k$ sein. (Wäre nämlich $3g < k$, so

$\square$

Ziel wird es nun sein, einen Graphen zu finden, der solcher oder einer ähnlichen Bedingung widerspricht. (Wird fortgesetzt)