# Kombinatorische Spieltheorie

**Notizen aus Zirkel 7c der**
**Mathematischen Schülergesellschaft “Leonhard Euler”**
**im Schuljahr 2016/17**

Daniel Platt

Stand: 29. Dezember 2016

# 1. Klein anfangen

Die kombinatorische Spieltheorie beschäftigt sich mit Spielen, in denen kein Zufall vorkommt, die zwei Spieler abwechselnd Spielzüge machen und in denen alle Informationen für alle Spieler offen sind. Zum Beispiel fallen die Spiele Schach und Go in diese Kategorie. Für Spiele wie Würfeln, Poker und Fußball kann man die Methoden der kombinatorischen Spieltheorie nicht anwenden.

Die Frage ist üblicherweise, welcher der beiden Spieler eine Gewinnstrategie hat. Das heißt: Welcher Spieler kann gewinnen, wenn er sich nur geschickt genug anstellt, egal wie schlau der andere Spieler spielt? Man darf sich hierbei nie darauf verlassen, dass der Gegner einen Fehler macht, sondern muss immer auf alles vorbereitet sein.

Wie sowas funktioniert, machen wir uns an einem Beispiel klar:

**Spiel 1.1** (Nim) Die Spieler $A$ und $B$ spielen gegeneinander. Sie machen abwechselnd Spielzüge, wobei $A$ beginnt. Derjenige Spieler, der zuerst keinen Spielzug mehr ausführen kann, verliert.
Gegeben ist ein Haufen mit 100 Steinen. In einem Zug darf ein Spieler zwischen 1 und 9 Steinen vom Haufen entfernen.

**Behauptung** Bei diesem Spiel hat Spieler $A$ eine Gewinnstrategie.

*Beweis.* Wir beschreiben die Gewinnstrategie für Spieler $A$ explizit:

- Im ersten Zug muss $A$ einen Stein vom Haufen entfernen.
- Nimmt $B$ daraufhin $x$ Steine in seinem Zug, so nimmt $A$ in seinem Zug $11-x$ Steine. Dies wird so lange wiederholt, bis das Spiel endet.

Wenn $A$ diese Strategie anwendet, so muss er gewinnen, egal was $B$ tut. Der Grund dafür ist: Am Ende jedes Zuges von $A$ liegt auf dem Haufen eine durch 11 teilbare Anzahl von Steinen. Während des Spiels werden die Zahlen 99, 88, 77, ... durchlaufen, bis man am Ende bei 0 ankommt.

D.h. veranschaulicht:

$$\begin{aligned} 100 &\overset{A}{\to} 99 \overset{B}{\to} 89 \text{ bis } 98 \overset{A}{\to} 88 \overset{B}{\to} 78 \text{ bis } 87 \ldots \\ &\overset{A}{\to} 22 \overset{B}{\to} 12 \text{ bis } 21 \overset{A}{\to} 11 \overset{B}{\to} 1 \text{ bis } 10 \overset{A}{\to} 0. \end{aligned}$$

□

Wenn man die Lösung so aufgeschrieben sieht, leuchtet es ein, dass sich $B$ noch so sehr anstrengen kann, aber einfach nicht gewinnen wird, solange $A$ keinen Fehler macht. Doch wie kommt man auf diese Lösung?

Die Antwort hier lautet: *Klein anfangen!* Wir möchten zwar etwas über das Spiel mit 100 Steinen wissen, aber es ist hilfreich, erstmal mit kleinen Zahlen anzufangen.

Angenommen, man fängt mit 10 Steinen anstelle von 100 an. Dann gibt es gar nichts nachzudenken, sondern $A$ nimmt einfach im ersten Zug alle Steine und gewinnt – so weit, so gut.

Wie ist es mit 11 Steinen? Schon etwas komplizierter. Wir merken: Egal, wie viele Steine $A$ nimmt, $B$ kann immer alle verbleibenden Steine nehmen und damit gewinnen. Man müsste es also irgendwie schaffen, dass der Gegner bei 11 Steinen landet...

Das geht natürlich, wenn wir mit 12 bis 21 Steinen starten! In diesen Fällen kann $A$ auf 11 Steine reduzieren und $B$ die Verluststellung vorsetzen. Also sind Stellungen mit 12 bis 21 Steinen gewonnen.

Kritisch wird es nur bei 22 Steinen: Egal, wie viele Steine $A$ nimmt, er wird seinem Gegner immer eine der Gewinnstellungen von 12 bis 21 Steinen präsentieren. Also hätte man in diesem Fall verloren...

Und so erkennt man dann das Muster, dass die durch 11 teilbaren Zahlen eine Sonderrolle einnehmen.

**Aufgaben:**

1. Betrachte das veränderte Nim-Spiel, bei dem der Haufen anfangs aus $n$ Steinen besteht und jeder Spieler in einem Zug bis zu $k$ Steine nehmen darf. $k$ und $n$ sollen dabei natürliche Zahlen sein, die vor Spielbeginn festgelegt werden.

   Welcher Spieler hat hier eine Gewinnstrategie?

2. Wir ändern das oben beschriebene Nim-Spiel, sodass derjenige Spieler verliert, der den letzten Stein nimmt. Das heißt, wir betrachten das folgende Spiel:

   **Spiel 1.2** (Misère-Nim) Die Spieler $A$ und $B$ spielen gegeneinander. Sie machen abwechselnd Spielzüge, wobei $A$ beginnt. Derjenige Spieler, der zuerst keinen Spielzug mehr ausführen kann, *gewinnt*.
   Gegeben ist ein Haufen mit 100 Steinen. In einem Zug darf ein Spieler zwischen 1 und 9 Steinen vom Haufen entfernen.

   *Anmerkung: Zu fast allen von uns betrachteten Spielen kann man die Misère-Version betrachten. Manchmal ist die Analyse der Misère-Version ähnlich zur Analyse der normalen Version, wie in diesem Fall. Manchmal fällt die Analyse aber auch sehr viel schwerer, wie zum Beispiel beim Spiel* Sprouts, *das später behandelt wird.*

3*. Betrachte das folgende Spiel:

   **Spiel 1.3** (Klassiches Nim) Die Spieler $A$ und $B$ spielen gegeneinander. Sie machen abwechselnd Spielzüge, wobei $A$ beginnt. Derjenige Spieler, der zuerst keinen Spielzug mehr ausführen kann, verliert.
   Gegeben ist mehrere Haufen mit unterschiedlich vielen Steinen. In einem Spielzug darf ein Spieler von genau einem Haufen beliebig viele Steine entfernen. (Es gibt nur ganze Steine und es gibt keine negativen Steine)

   Welcher Spieler hat hier eine Gewinnstrategie?

   *Hinweis: Stelle die Steinanzahlen auf den verschiedenen Haufen als Dualzahlen dar. Schreibe die Zahlen so untereinander, dass die Einerziffern untereinander stehen. Addiere alle Ziffern einer Spalte. Zeige: Wenn alle diese Summen gerade sind, so hat B eine Gewinnstrategie, andernfalls hat A eine Gewinnstrategie.*

# 2. Das Symmetrieprinzip

Mit dem *Symmetrieprinzip* kann es in manchen Fällen sehr leicht sein, eine Gewinnstrategie für den zweiten Spieler anzugeben. Falls das Spiel nämlich eine Symmetrie hat, so kann der zweite Spieler einfach jeden Zug des anderen Spielers kopieren, und gewinnt am Ende, weil er den letzten Zug macht.

Wie das genau zu verstehen ist, veranschaulicht das folgende Beispiel:

**Spiel 2.1** ($x$,$y$-Haufen) Die Spieler $A$ und $B$ spielen gegeneinander. Sie machen abwechselnd Spielzüge, wobei $A$ beginnt. Derjenige Spieler, der zuerst keinen Spielzug mehr ausführen kann, verliert.
Gegeben ist ein Haufen mit $x$ Steinen und ein zweiter Haufen mit $y$ Steinen, wobei $x$ und $y$ natürliche Zahlen sind. In einem Spielzug darf ein Spieler beliebig viele Steine von einem der beiden Haufen entfernen.

**Behauptung** Falls $x = y$ ist, so hat $B$ eine Gewinnstrategie. Falls $x \neq y$ ist, so hat $A$ eine Gewinnstrategie.

*Beweis.*

- Wir betrachten zuerst den Fall $x = y$:

  $B$ muss immer den Zug von $A$ auf dem jeweils anderen Haufen ausführen. Nach jedem Zug von $B$ liegen dann auf beiden Haufen gleich viele Steine. Früher oder später muss $A$ den letzten Stein eines Haufens nehmen und $B$ nimmt dann den letzten Stein des anderen Haufens.

  Wir veranschaulichen ein Spiel mit $x = y = 10$:

$$\begin{aligned}(10,10) &\overset{A}{\to} (6,10) \overset{B}{\to} (6,6) \overset{A}{\to} (6,5) \overset{B}{\to} (5,5)\\ &\overset{A}{\to} (2,5) \overset{B}{\to} (2,2) \overset{A}{\to} (2,1) \overset{B}{\to} (1,1)\\ &\overset{A}{\to} (0,1) \overset{B}{\to} (0,0).\end{aligned}$$

- Im Fall $x \neq y$:

  Im ersten Zug kann $A$ so viele Steine vom größeren Haufen wegnehmen, dass beide Haufen gleich viele Steine enthalten. Dann kann $A$ die o.g. Strategie anwenden.

$\square$

In dem Fall war die Symmetrie offensichtlich, weil das Spielfeld bereits in zwei Teile geteilt war. Meistens ist das aber nicht der Fall. Entweder erkennt man geschickt, dass von Anfang an eine Symmetrie vorliegt, das kann $B$ dann ausnutzen, um die Züge von $A$ zu kopieren. Oft kann aber auch $A$ im ersten Zug das Spielfeld in zwei symmetrische Teile zerlegen und dann die Züge von $B$ zu kopieren. Beispiele für beide Fälle finden sich in den Aufgaben.

**Aufgaben:**

4. Betrachte das folgende Spiel:

   **Spiel 2.2** (Kayles) Die Spieler $A$ und $B$ spielen gegeneinander. Sie machen abwechselnd Spielzüge, wobei $A$ beginnt. Derjenige Spieler, der zuerst keinen Spielzug mehr ausführen kann, verliert.
   Gegeben sind 10 Kegel, die in einer Reihe aufgestellt sind. In jedem Zug darf ein Spieler einen einzelnen Kegel oder zwei nebeneinanderstehende Kegel entfernen. (Zwei Kegel stehen nebeneinander, wenn kein zwischen Ihnen stehender Kegel entfernt wurde. Also nicht über Lücken hinweg!)

   Welcher Spieler hat hier eine Gewinnstrategie? Wie sieht es aus, wenn am Anfang $n$ Kegel vorhanden sind und jeder Spieler pro Zug 1 bis $k$ Kegel entfernen darf? $n$ und $k$ sollen dabei natürliche Zahlen sein, die vor Spielbeginn festgelegt werden.

5. Betrachte die folgende, modifizierte Version des in 4. erklärten Spiels Kayles: Die Kegel sind jetzt auf einer Kreislinie aufgestellt.

   Welcher Spieler hat für den Fall, dass 10 Kegel vorhanden sind und Spieler 1 bis 2 Kegel entfernen dürfen, eine Gewinnstrategie? Und im allgemeinen Fall für zwei natürliche Zahlen $n$ und $k$?

6. Gegeben ist ein reguläres 2504-Eck. Ernie und Bert zeichnen abwechselnd Diagonalen ein, wobei jedem nur dann erlaubt ist, zwei Eckpunkte zu verbinden, wenn die neue Diagonale keine der schon eingezeichneten schneidet. Ernie fängt an und derjenige, der nicht mehr ziehen kann, verliert. Wer kann den Sieg erzwingen?

7. Wir betrachten eine veränderte Version des Spiels Nim aus 1.1. Nun sind 100 Haufen mit je 100 Steinen gegeben und ein Spieler darf in einem Zug 1 bis 10 Steine von genau einem Haufen entfernen.

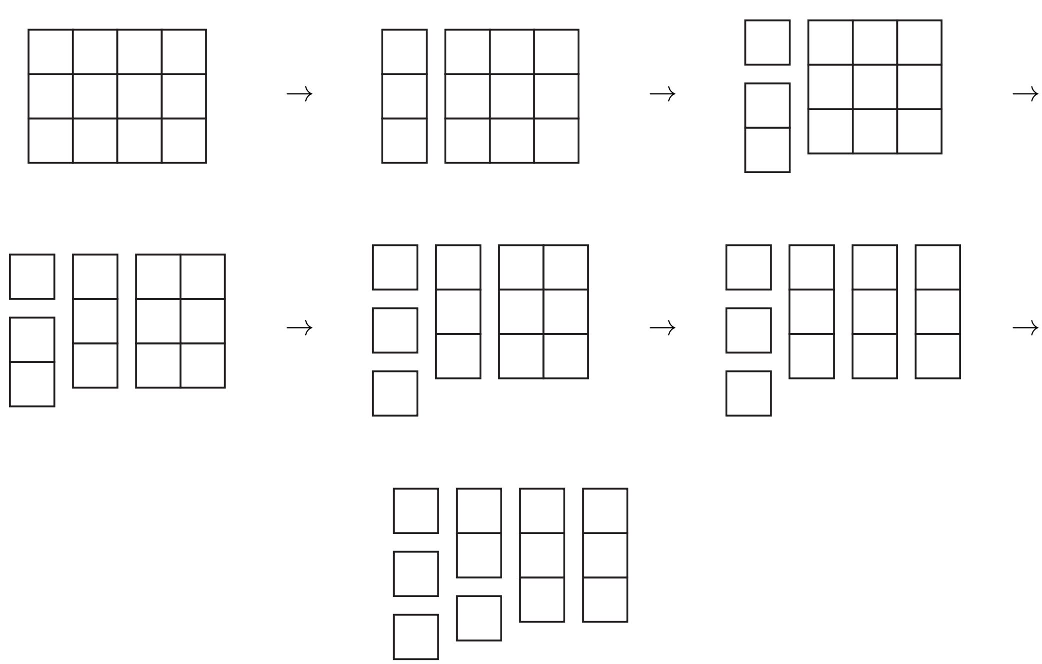
   Welcher Spieler hat dann eine Gewinnstrategie?

# 3. Zugbäume

Manche Spiele haben keine Symmetrie oder zumindest keine offensichtliche Symmetrie. Das Prinzip *klein anfangen* ist zwar immer noch hilfreich, um eine Idee dafür zu bekommen, wer eine Gewinnstrategie hat, doch am Ende führt manchmal kein Weg daran vorbei, für *jeden möglichen Zug* des einen Spielers die perfekte Antwort des anderen Spielers anzugeben. Dabei kann man sich oft Arbeit ersparen, indem man bemerkt, dass die gleiche Spielstellung auf mehreren Wegen erreicht werden kann, aber nur einmal notiert werden muss. Wir veranschaulichen das am folgenden Beispiel:

**Spiel 3.1** (Cutcake) Die Spieler $H$ und $V$ spielen gegeneinander. Sie machen abwechselnd Spielzüge, wobei $V$ beginnt. Derjenige Spieler, der zuerst keinen Spielzug mehr ausführen kann, verliert.
Gegeben ist ein Kuchen auf dem 3 Zeilen und 4 Spalten markiert wurden. In einem Zug darf $V$ ein Kuchenstück nehmen und dieses durch einen vertikalen Schnitt entlang einer Linie teilen. (Am Anfang gibt es nur ein Kuchenstück, nämlich den ganzen Kuchen. Nach dem ersten Schnitt gibt es zwei Stücke) $H$ hingegen darf ein Stück durch einen horizontalen Schnitt teilen.

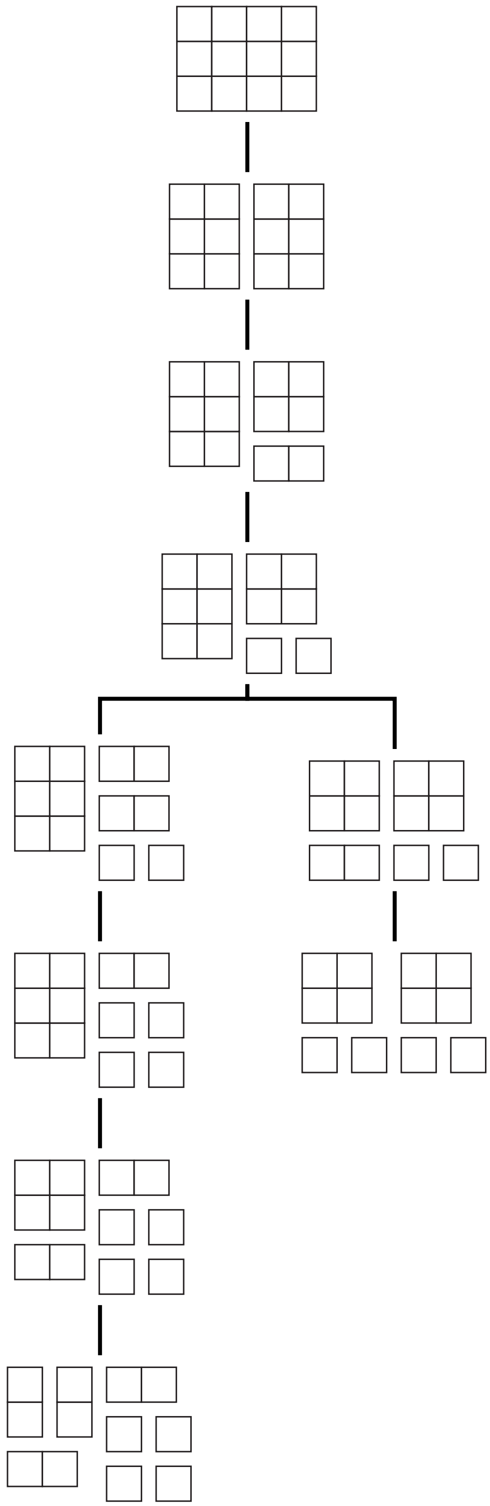
Abgebildet ist ein möglicher Spielverlauf:



Und an dieser Stelle hat $H$ das Spiel gewonnen, weil er den letzten Zug gemacht hat und $V$ kein Zug mehr bleibt.

**Behauptung** Im Spiel Cutcake hat $V$ eine Gewinnstrategie.

*Beweis.* Wir geben einen Zugbaum an, der den ersten Zug von $V$ angibt und daraufhin für jede Möglichkeit von $H$ eine Antwort angibt, die zum Gewinn führt.



Bemerke: Beim ersten Zug von $H$ gibt es nur eine Möglichkeit. Alle anderen Züge gehen aus diesem durch Umlegen der Kuchenstücke hervor. Ebenso beim letzten Zug von $H$ im linken Teilbaum.

In den beiden Stellungen rechts unten und links unten am Ende des Baums kann $V$ das Symmetrieprinzip anwenden und daher gewinnen.

Weitere Zugmöglichkeiten für $V$ müssen nicht betrachtet werden, weil es genügt, *eine* Strategie anzugeben, die zum Gewinn führt. (Es gibt allerdings weitere Möglichkeiten, mit denen $V$ ebenso gewinnen wird) □

**Aufgaben:**

8. Zeige: $V$ hat auch eine Gewinnstrategie auf einem sehr großen Kuchen der Breite 1000 und der Höhe 500.
9. Betrachte das folgende Spiel:

   **Spiel 3.2** (Sprouts) Die Spieler $A$ und $B$ spielen gegeneinander. Sie machen abwechselnd Spielzüge, wobei $A$ beginnt. Derjenige Spieler, der zuerst keinen Spielzug mehr ausführen kann, verliert.
   Gegeben sind zwei Punkte auf einem Blatt Papier. In einem Spielzug muss ein Spieler zwei Punkte durch eine Linie verbinden, dabei sind auch krumme Linien erlaubt. Eine Linie darf allerdings keine bestehenden Linien kreuzen und auch nicht durch Punkte verlaufen. Eine Linie darf auch einen Punkt mit sich selbst verbinden. Auf die Linie wird dann ein neuer Punkt gemalt.
   Ein Punkt, in den drei Linien münden, scheidet aus und darf nicht mehr mit neuen Linien verbunden werden.

   *Bemerkung: Bei dem Spiel soll es nicht um Zeichengenauigkeit gehen. Das heißt: Spieler dürfen Linien ein bisschen zur Seite schieben, damit sie ihre Verbindungslinie ohne Probleme zeichnen können.*

   (a) Zeige: Das Spiel ist *endlich*. Das heißt: Eine Partie kann nicht unendlich viele Züge lang dauern.
   (b) Wie viele Spielzüge kann eine Partie mit $n$ Startpunkten maximal haben? Welcher Spieler gewinnt, wenn wirklich die maximale Anzahl Züge gespielt wird?
   (c) Benutze deine Überlegungen aus (b) um herauszufinden, welcher der beiden Spieler (im Fall von zwei Startpunkten) eine Gewinnstrategie hat.
10. Betrachte die *Misère-Version* des Spiels Sprouts. In diesem Spiel *verliert* derjenige Spieler, der den letzten Zug macht. Wer kann bei diesem Spiel (mit zwei Startpunkten) den Sieg erzwingen?

11*. Stelle in einem Vortrag zusammen, was im Moment über das Spiel Sprouts und seine Misère-Version bekannt ist:
   (a) Was ist die bisher unwiderlegte Vermutung, welcher der Spieler (in Abhängigkeit von der Anzahl von Startpunkten) eine Gewinnstrategie hat?
   (b) Bis zu welcher Anzahl an Startpunkten wurde diese Vermutung überprüft?
   (c) Sprouts wurde mit Computerhilfe analysiert. Wie werden Partien von Sprouts für den Computer lesbar notiert? [1]

12*. Betrachte folgende Faustregel für das Spiel Cutcake:

[1] Viele Informationen zum Thema finden sich auf der Website des *Weltverbandes für das Spiel Sprouts* unter `www.wgosa.org` (in englischer Sprache). Dort finden sich viele Beispielpartien und auch die Möglichkeit, eine Partie per E-Mail gegen den amtierenden Weltmeister zu spielen. Er akzeptiert alle Herausforderungen.

In jedem Zug muss der Spieler das kleinste vorhandene
Stück in zwei möglichst gleich große Stücke zerteilen.

Präzisiere diese Strategie. Welches genau ist *das kleinste Stück*? (Klein im Sinne von Fläche, oder Breite, oder …?)

Zeige: Folgt ein Spieler dieser Strategie, so erreicht er immer das optimale Ergebnis. Das heißt: Falls der Spieler eine Gewinnstrategie hat, so ist sie gegeben durch diese Faustregel. Falls dieser Spieler keine Gewinnstrategie hat, so minimiert er zumindest den Rückstand auf den anderen Spieler.

*Hinweis: Die Behauptung, dass diese Strategie wirklich optimal ist, ist eine unbewiesene Vermutung. Es ist auch möglich, dass diese Strategie nicht optimal ist. In diesem Fall müsste man eine Beispielpartie angeben, in der ein Spieler mit einer anderen Strategie als der oben genannten ein besseres Ergebnis erzielen kann.*

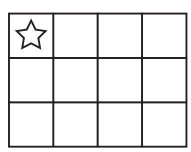
# 4. Strategieklau

Bisher haben wir für mehrere Spiele gezeigt, dass einer der beiden Spieler den Sieg erzwingen kann, indem wir explizit eine Gewinnstrategie für ihn angegeben haben. Das *Strategieklau*-Argument ist eine Beweistechnik, mit der man für einige Spiele prüfen kann, welcher der Spieler eine Gewinnstrategie hat, ohne diese exakt anzugeben.

Wir betrachten dazu ein Beispiel:

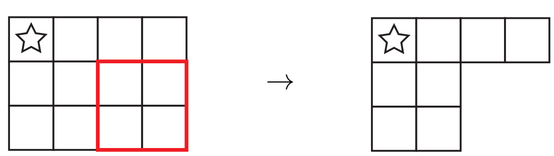
**Spiel 4.1** (Chomp) Die Spieler $A$ und $B$ spielen gegeneinander und führen abwechselnd Züge aus.
Kleine Quadrate sind in $m$ Reihen und $n$ Spalten zu einem Rechteck angeordnet, wobei $m$ und $n$ natürliche Zahlen sind. In einem Zug kann ein Spieler ein Rechteck von Quadraten aus dem Spielfeld entfernen. Das zu entfernende Rechteck muss dabei immer einen Eckpunkt in der ganz rechten unteren Ecke des Spielfeldes haben (auch wenn das Quadrat in der rechten underen Ecke bereit entfernt wurde). Derjenige Spieler, der die linke obere Ecke entfernt, verliert das Spiel.

Hier zum Beispiel das Spielfeld für den Fall $m = 3$ und $n = 4$.

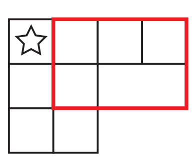


Das Spiel stellt eine Vollmilch-Schokoladentafel dar, in der durch einen Fabrikationsfehler eine Ecke Zartbitter-Schokolade in der linken oberen Ecke platziert wurde. Die Spieler brechen nun Stücke der Vollmilch-Schokolade ab, die sie essen können. Und weil Zartbitter-Schokolade bekanntermaßen extrem eklig ist, verliert derjenige Spieler, der das lezte Stück essen muss.

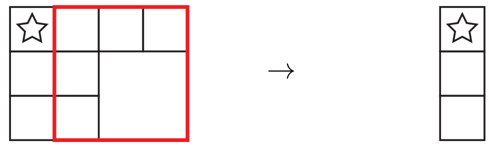
$A$ könnte zum Beispiel im ersten Zug ein $2 \times 2$-Quadrat rechts unten entfernen:



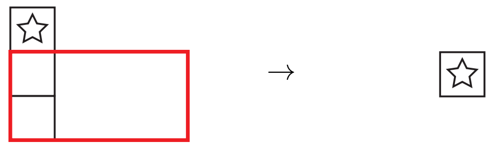
Folgender Zug ist nun *nicht* erlaubt für $B$, weil das von ihm zu entfernende Rechteck nicht in der ganz rechten unteren Ecke des Spielfeldes endet:



Ein legaler Zug wäre zum Beispiel der folgende:



Daraufhin hätte $A$ den Antwortzug:



Und damit hätte $A$ das Spiel gewonnen, weil $B$ nichts anderes mehr übrig bleibt, als das Zartbitter-Stück zu essen. (Bäh)

**Behauptung** Spieler $A$ hat eine Gewinnstrategie, falls die Spielfeldgröße nicht $1 \times 1$ ist.

*Beweis.* Wir benutzen das Strategieklau-Argument. Dazu unterscheiden wir zwei Fälle:

- Fall 1: Angenommen, der Startzug, in dem $A$ nur ein Quadrat ganz rechts unten nimmt, ist ein Gewinnzug.

  Das heißt, nach diesem Zug ist die Stellung für $B$ verloren. Dann hat $A$ offensichtlich eine Gewinnstrategie, nämlich genau diese, die mit dem o.g. ersten Zug beginnt.
- Fall 2: Angenommen, der Startzug, in dem $A$ nur ein Quadrat ganz rechts unten nimmt, ist kein Gewinnzug.

  Das heißt, nachdem $A$ diesen ersten Zug macht, ist die Stellung für $B$ gewonnen. $B$ hat also in dieser Stellung Gewinnstrategie. $B$ kann also in dieser Stellung einen bestimmten Zug spielen, der eine für $A$ verlorene Stellung herbeiführt.

  *Allerdings:* $A$ hätte genau diesen Zug ja auch als allerersten Zug spielen können und damit eine für $B$ verlorene Stellung herbeiführen können.

Also hat $A$ in beiden Fällen eine Gewinnstrategie. Weitere Fälle kann es nicht geben, also hat $A$ immer eine Gewinnstrategie. □

An dieser Stelle sei nochmal bemerkt, dass dieser Beweis überhaupt keine Aussage darüber macht, wie $A$ nun tatsächlich gewinnen kann. In den meisten Fällen wird die Strategie, im ersten Zug ein einzelnes Quadrat rechts unten zu nehmen, nicht zum Erfolg führen.

**Aufgaben:**

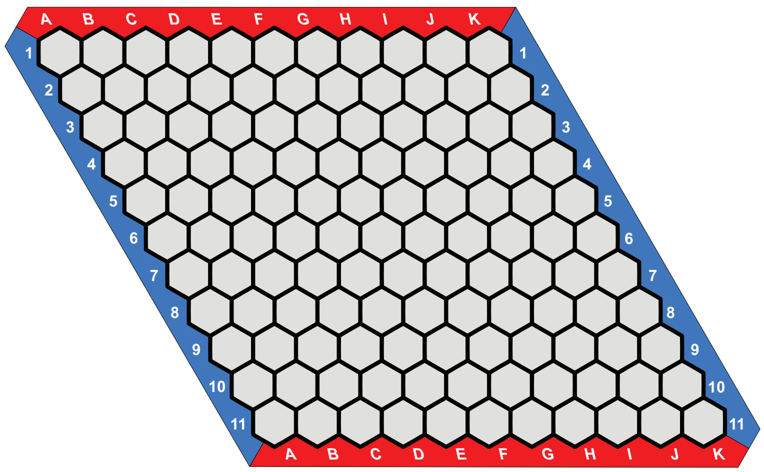
13. Gib eine explizite Gewinnstrategie für Spieler $A$ für das Spiel Chomp auf folgenden Spielfeldern an:
    (a) Ein quadratisches Spielfeld der Größe $n \times n$, wobei $n$ eine natürliche Zahl ist.
    (b) Ein Spielfeld der Größe $2 \times m$, wobei $m$ eine natürliche Zahl ist.
    (c) Das Spielfeld der Größe $3 \times 4$.
14. Betrachte die Misère-Version des Spiels Chomp. Dabei verliert derjenige Spieler, der den letzten möglichen Zug macht, der nicht die linke obere Ecke des Spielfeldes enthält. Welcher Spieler hat hier eine Gewinnstrategie?
15. Betrachte eine Modifikation des Spiels Schach: Dabei muss jeder Spieler in einem Zug zwei Züge hintereinander ausführen. Das Spielziel ist immer noch, den Gegner schachmatt zu

setzen. Der König darf dabei nicht geschlagen werden. Remis soll bei diesem Spiel unmöglich sein, d.h. im Falle von Patt oder dreimaliger Stellungswiederholung verliert derjenige Spieler, der den letzten Zug gemacht hat.

Zeige: Der beginnende Spieler hat eine Gewinnstrategie.

16. Betrachte das folgende Spiel:

**Spiel 4.2** Die Spieler *Rot* und *Blau* spielen gegeneinander und führen abwechselnd Spielzüge aus, wobei *Rot* beginnt. Gespielt wird auf einem Spielfeld bestehend aus $11 \times 11$ Sechsecken, angeordnet in einer Rautenform.
In jedem Spielzug färbt ein Spieler eines des Rechtecke in seiner eigenen Farbe ein. Sobald ein durchgehender Weg von roten Sechsecken vom oberen zum unteren Spielfeldrand besteht, hat *Rot* gewonnen. Sobald ein durchgehender Weg von blauen Sechsecken vom linken zum rechten Spielfeldrand besteht, hat *Blau* gewonnen.




(a) Zeige: Das Spiel kann nicht unentschieden ausgehen.

(b) Zeige: *Rot* hat eine Gewinnstrategie.

## 4.1 Ausblick und Quellen

Einige der mit einem $(*)$ versehenen Aufgaben sind umfangreicher und eignen sich für einen kurzen Schülervortrag mit einer Länge von circa 10 Minuten. Weitere mögliche Vortragsthemen, die unmittelbar zum oben behandelten Stoff passen, sind:

1. **John Forbes Nash.** Der Mathematiker Nash beschäftigte sich mit verschiedenen Aspekten der Spieltheorie. Er beschäftigte sich unter anderem im Detail mit dem oben betrachteten Spiel Hex. Im Vortrag könnte kurz die Person selbst und das Spiel Hex vorgestellt werden. Darüber hinaus bietet sich auch ein Exkurs in die allgemeine Spieltheorie an. Nash erhielt für seine Arbeit zum *Nash-Gleichgewicht* den Nobelpreis in Wirtschaftswissenschaften, das Konzept kann am Beispiel des Gefangenendilemmas erklärt werden.
2. **Grundy-Zahlen.** Jedes kombinatorische Spiel, das zusätzlich noch neutral ist, kann als Nim-Spiel betrachtet werden. Die Größe dieses Haufens heißt *Grundy-Zahl*. Das Ergebnis soll ohne Beweis erwähnt werden und an einem Beispiel soll eine Grundy-Zahl berechnet werden.
3. **Der Wert einer Stellung.** Es gibt ein sinnvolles Konzept, in einem kombinatorischen Spiel jeder Stellung einen Wert zuzuordnen. Wenn das geschehen ist, kann man Stellungen addieren und damit komplizierte Spiele in leicht zu analysierende Teilspiele zerlegen. Das kann am Beispiel Cutcake erläutert werden.

Außerdem bietet es sich an, weitere kombinatorische Spiele vorzustellen. Eine Auswahl findet sich zum Beispiel in unten genannten Büchern.

Bücher zum weiteren Studium der kombinatorischen Spieltheorie:

1. Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway: *Gewinnen, Bd.1, Von der Pike auf*

   neue, überarbeitete Auflage, nur in englischer Sprache: Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, Richard K. Guy: *Winning Ways for Your Mathematical Plays. Volume 1*

2. Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway: *Gewinnen, Bd.2, Bäumchen-wechsle-dich*

   neue, überarbeitete Auflage, nur in englischer Sprache: Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, Richard K. Guy: *Winning Ways for Your Mathematical Plays. Volume 2*

3. Elwyn R. Berlekamp: *Gewinnen, Bd.3, Fallstudien*

   neue, überarbeitete Auflage, nur in englischer Sprache: Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, Richard K. Guy: *Winning Ways for Your Mathematical Plays. Volume 3*

4. Elwyn R. Berlekamp: *Gewinnen, Bd.4, Solitairspiele*

   neue, überarbeitete Auflage, nur in englischer Sprache: Elwyn R. Berlekamp: *Winning Ways for Your Mathematical Plays. Volume 4*

5. Cal Hudson: *Sprouts Theory Evolving*

Online-Quellen:

6. `www.wgosa.org` – Website des Weltverbandes für das Spiel Sprouts

7. `www.coursera.org/learn/combinatorial-game-theory/` – Online-Kurs zur kombinatorischen Spieltheorie (auf Universitätsniveau)