Tag der Mathematik Trainingslager
Test-Wettbewerb – Lösungen

(1.) Wenn man in den Ausdruck

$$\frac{12 \cdot n + 1}{30 \cdot n + 2}$$

für n eine natürliche Zahl einsetzt, erhält man einen Bruch. Zum Beispiel erhält man für $n = 3$ den Bruch

$$\frac{12 \cdot 3 + 1}{30 \cdot 3 + 2} = \frac{37}{92}.$$

(a) Gebt den Bruch für $n = 1, 2, 4, 5$ konkret an.

(b) Zeigt, dass die fünf Brüche für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ jeweils nicht weiter kürzbar sind.

(c) Beweist, dass der allgemeine Bruch (ganz oben) für *alle* natürlichen Zahlen n nicht weiter kürzbar ist.

(a),(b) Wir geben die Werte der Brüche für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ und geben auch die Primzahlzerlegung von Zählen und Nenner an. Wir bemerken, dass die Primzahlzerlegungen von Zählen und Nenner jeweils keinen gemeinsamen Faktor enthalten, folglich kann der Bruch nicht weiter gekürzt werden.

$$\begin{aligned}
n = 1: &\quad \frac{13}{32} = \frac{12}{2^5},\\
n = 2: &\quad \frac{25}{62} = \frac{5^2}{2 \cdot 31},\\
n = 3: &\quad \frac{37}{92} = \frac{37}{2^2 \cdot 29},\\
n = 4: &\quad \frac{49}{122} = \frac{7^2}{2 \cdot 61},\\
n = 5: &\quad \frac{61}{152} = \frac{61}{2^3 \cdot 19}.
\end{aligned}$$

(c) Wir bemerken zunächst: $12n + 1$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ eine ungerade Zahl und $30n + 2$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ eine gerade Zahl. 2 kann also kein gemeinsamer Teiler von Zähler und Nenner sein. D.h.: $\frac{12n+1}{30n+2}$ ist genau dann kürzbar, wenn $\frac{12n+1}{15n+1}$ kürzbar ist.

“$\frac{12n+1}{15n+1}$ kürzbar” bedeutet gerade, dass ein gemeinsamer Teiler $p \in \mathbb{N}$ existiert. $p \mid 15n + 1$ und $p \mid 12n + 1$, also teilt p auch die Differenz, d.h. $p \mid (15n + 1 - 12n - 1)$ bzw. $p \mid 3n$. Aus $p \mid 3n$ und $p \mid 12n + 1$ folgt $p \mid 1$. Das heißt, 1 ist der einzige gemeinsame Teiler von Zähler und Nenner, also ist der Bruch nicht kürzbar.

(2.) (a) Konstruiert ein Dreieck ΔABC mit Umkreisradius $r = 4$cm und Seitenlängen $b = 4$cm und $c = 7$cm (c ist die Länge der Strecke AB und b die Länge der Strecke AC) nur mit Zirkel und Lineal. Gebt eine Beschreibung für eure Konstruktion an.

(b) Bestimmt alle nicht zueinander kongruenten Dreiecke mit Umkreisradius $r = 4$cm und Seitenlängen $b = 4$cm und $c = 7$cm. Beweist, dass alle gefundenen Dreiecke (die eventuell schon mit bloßem Auge als nicht kongruent zueinander erkannt werden können) tatsächlich nicht deckungsgleich sind. Messen ist kein Beweis! Formuliert euren Beweis so, dass er sogar ohne Anfertigung einer Skizze verständlich ist.

(c) Begründet, dass es keine weiteren, nicht zu den schon gefundenen kongruente Dreiecke mit diesen Eigenschaften gibt.

(a) Konstruktion:

(i) Zeichne einen Kreis k_1 mit Mittelpunkt M und Radius 4cm.

(ii) Zeichne einen Punkt A auf k.

(iii) Schlage einen Kreis k_2 mit Radius 7cm um A. Die Schnittpunkte von k_1 und k_2 seien B und $\tilde{B}$.

(iv) Schlage einen Kreis k_3 mit Radius 4cm um B. Die Schnittpunkte von k_1 und k_3 seien C_1 und C_2.

Das Dreieck ΔABC_1 erfüllt dann die Forderungen aus der Aufgabenstellung.

(b),(c) Die Wahlen von M in der Ebene und A auf k waren ohne Beschränkung der Allgemeinheit. Das heißt für eine andere Wahl $\tilde{M}$ von M existiert eine Kongruenztransformation, die $\tilde{M}$ in M überführt und für eine andere Wahl $\tilde{A}$ von A existiert eine Kongruenztransformation, die M fixiert lässt und $\tilde{A}$ in A überführt.

Die Punkte B und $\tilde{B}$ liegen spiegelsymmetrisch bezüglich AM. Folglich erhalten wir eine kongruente Figur, falls wir in Schritt (iv) $\tilde{B}$ anstelle von B wählen.

Es bleibt zu zeigen, dass ΔABC_1 und ΔABC_2 nicht kongruent sind. Angenommen, es gibt eine Kongruenztransformation zwischen beiden Dreiecken.

Falls die Transformation die beiden Eckpunkte A und B fixiert lässt, so muss C_1 auf C_2 abgebildet werden. Die Transformation lässt also den Umkreis von ΔABC_1 und damit auch insbesondere M fixiert. Das ist aber für die Spiegelung an AB nicht der Fall, was ein Widerspruch ist.

Falls die Transformation A fixiert lässt, so muss sie auch B fixiert lassen. Anderenfalls würde B auf C_2 abgebildet werden, was $\left|\overline{AB}\right| \neq \left|\overline{AC_2}\right|$ widerspricht. Dieser Fall wurde aber oben bereits ausgeschlossen, also kann A nicht fixiert bleiben.

Übrig bleiben die folgenden Fälle: (Der Pfeil bedeutet dabei immer *wird abgebildet auf*)

1. $A \to B$, $B \to A$ (daraus folgt $C_1 \to C_2$): Dann gilt $\left|\overline{AC_1}\right| = \left|\overline{AC_2}\right| = 4$cm, folglich sind ΔABC_1, ΔABC_2 und ΔABM kongruent (Kongruenzsatz SSS) mit Basis $\overline{AB}$. C_1, C_2 und M sind aber paarweise verschieden, das ist ein Widerspruch.

2. $A \to B$, $B \to C_2$ (daraus folgt $C_1 \to A$): Dann gilt 4cm$= \left|\overline{AC_1}\right| = \left|\overline{AC_1}\right| \left|\overline{BA}\right| =$ 7cm, was ein Widerspruch ist.

3. $A \to C_2$, $B \to A$ (daraus folgt $C_1 \to B$): Dann gilt 7cm$= \left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{AC_2}\right| = 4$cm, was ein Widerspruch ist.

4. $A \to C_2$, $B \to B$ (daraus folgt $C_1 \to C_2$): Dann gilt 7cm$= \left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{C_2B}\right|$, d.h. die Punkte C_1, A und C_2 liegen alle auf einem Kreis um B mit Radius 7cm. Sie liegen aber auch auf k_1, was ein Widerspruch dazu ist, dass die drei Punkte paarweise verschieden sind.

(3.) (a) Kann man die neun Felder eines 3×3-Quadrates so mit den Zahlen 0, 1 und -1 besetzen, dass die Zeilensummen, die Spaltensummen sowie die beiden (aus je drei Summanden bestehenden) Diagonalensummen alle voneinander verschieden sind?

(b) Kann man die Zeichen + und − so zwischen die folgenden Zahlen

$$1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 5 \;\; 6 \;\; 7 \;\; 8 \;\; 9 \;\; 10$$

schreiben, dass als Ergebnis 0 herauskommt?

In beiden Aufgabenteilen ist eine Lösung anzugeben, wenn die Antwort "Ja" ist. Ist die Antwort "Nein", wird eine Begründung erwartet, warum es nicht geht.

(a) Es gibt 3 Zeilensummen, 3 Spaltensummen und 2 Diagonalensummen. Weil nur die Zahlen -1, 0 und 1 zur Verfügung stehen, können allerdings nur die Summen -3, -2, -1, 0, 1, 2 und 3 auftreten, das sind nur 7 verschiedene Möglichkeiten. Es muss also mindestens eine Möglichkeit doppelt auftreten. Die Antwort auf die Frage lautet also *Nein*.

(b) *Nein*, denn egal, wie man + und − einfügt, wird das Ergebnis immer eine ungerade Zahl sein und kann daher nicht 0 lauten.

(4.) Vier Ehepaare sind bei einem fünften zu Gast. Beim Eintreffen findet ein allgemeines Händeschütteln statt, bei dem folgendes gilt:

(a) Niemand gibt sich selbst die Hand.

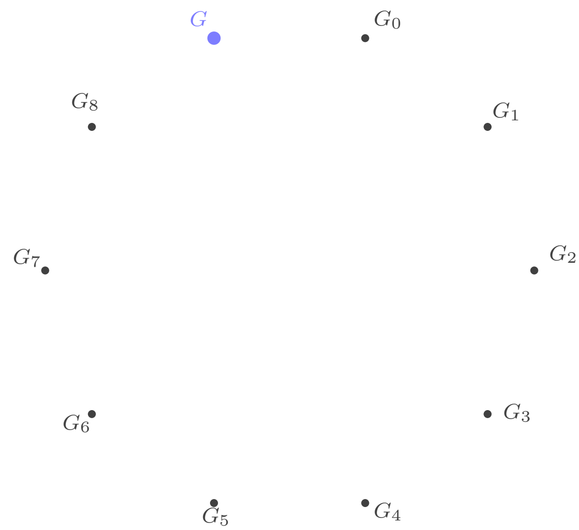
(b) Niemand gibt seinem Ehepartner die Hand.

(c) Niemand gibt jemand anderem mehr als einmal die Hand.

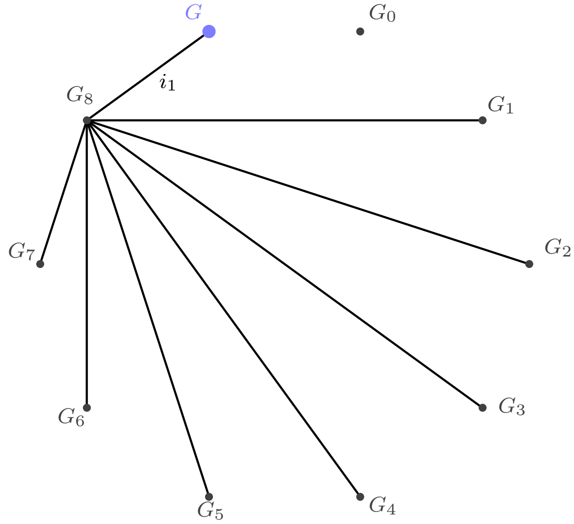
Nach dem Händeschütteln fragt der Gastgeber die anderen 9 Personen, wie oft sie insgesamt anderen die Hand gegeben haben. Von jeder Person bekommt er eine andere Zahl zur Antwort.

Frage: Welche Zahl antwortet ihm seine Frau?

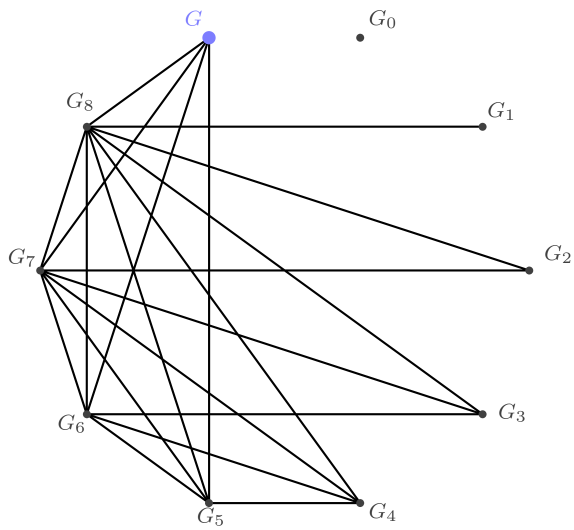
Dem Gastgeber werden die Zahlen 0, . . . , 8 geantwortet. Wir stellen alle Personen in einem Graphen dar, wobei G der Gastgeber ist und G_i die Person, welche i antwortet.



Wir zeichnen nun Striche, falls sich zwei Personen die Hände geschüttelt haben. Von G_8 wissen wir, dass er jedem außer G_0 die Hand geschüttelt hat, wir zeichnen also:



Nun wollen wir die 7 Leute finden, denen G_7 die Hand geschüttelt hat. G_0 und G_1 kommen nicht infrage, weil sie bereits voll besetzt sind. Es bleiben also G_2 bis G_6. Mit den gleichen Überlegungen für G_6 und G_5 erhalten wir das folgende Bild:



Wer ist nun die Frau von G? Zunächst stellen wir fest, dass G_8 nur mit G_0 verheiratet sein kann – allen anderen hat G_8 ja die Hände geschüttelt. Analog sehen wir, dass G_7 mit G_1 verheiratet, G_6 mit G_2 verheiratet und G_5 mit G_3 verheiratet ist. Es ist also G_4 mit G verheiratet, d.h. der Gastgeber erhält als Antwort *vier*.