

# Liste möglicher Vortragsthemen

(Details zu einzelnen Themen siehe die folgenden Seiten)

## Numerische Lineare Algebra:

1. Iterative Lösung linearer Gleichungssysteme (1 Sitzung)
2. Anwendungen der QR-Zerlegung: Lineare Ausgleichsprobleme, Eigenwertberechnungen (1 oder 2 Sitzungen)
3. Singulärwertzerlegung (SVD) von Matrizen – Bildkompression, maschinelle Erkennung handgeschriebener Texte usw. (2 Sitzungen)
4. Berechnung von Eigenwerten – Der PageRank-Algorithmus von Google (1 Sitzung)
5. Diskrete Fouriertransformationen, JPEG und MP3 (2 Sitzungen)

## Numerische Analysis:

6. Nichtlineare glatte Optimierung und das Newton-Verfahren (1 Sitzung)
7. Numerische Integration – Gauß-Quadratur (1 Sitzung)
8. Das Verfahren der Finiten Elemente für komplexe physikalische Phänomene (1 Sitzung)

## Algebra und diskrete Strukturen:

9. Modulares Potenzieren – Der RSA-Algorithmus in der Kryptographie (1 Sitzung)
10. Reed-Solomon-Codes – Fehlerkorrektur in Daten (2 Sitzungen)
11. Erzeugung von Zufallszahlen (1 Sitzung)
12. Diskrete Optimierung – Das „Travelling Salesman“-Problem (1 Sitzung)

## 1. Iterative Lösung linearer Gleichungssysteme – (1 Sitzung)

- Warum iterative Löser statt Gauß-Algorithmus oder QR-Zerlegung? (Aufwandsbetrachtung)
- Iterationsverfahren – Grundidee, Banachscher Fixpunktsatz, Sätze zur Konvergenz von Fixpunktiterationen (Bezug auf AM I wäre schön!)
- Jacobi-Verfahren, Gauss-Seidel-Verfahren, SOR-Verfahren – Vorstellung der Verfahren, Konvergenzresultate, Beispiele
- Aufwandsbetrachtung: Vergleich mit dem QR-Verfahren zur Lösung von LGS (vgl. AM I)

### Literaturvorschläge:

- D. Scholz: Numerik interaktiv, Springer, 2016.
- A. Meister: Numerik linearer Gleichungssysteme, Springer, 2016.
- W. Dahmen, A. Reusken, Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Springer, 2006, Kap.13.

## 2. Anwendung der QR-Zerlegung:

Lineare Ausgleichsprobleme (und Eigenwertberechnungen) (1 bzw. 2 Sitzungen)

- Was sind lineare Ausgleichsprobleme? Wo treten sie auf?
- Herleitung der Normalengleichung
- QR-Zerlegung für nicht-quadratische Matrizen
- Anwendung der QR-Zerlegung zur Lösung linearer Ausgleichsprobleme
- Anwendung der QR-Zerlegung zur Berechnung von Eigenwerten (entfällt bei einer Sitzung)

### Literaturvorschläge:

- W. Dahmen, A. Reusken, Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Springer, 2006 (Kap.4).
- L. Elden: Matrix Methods in Data Mining an Pattern Recognition, SIAM, 2007 (Kap. 3 und 5)
- R. Plato, Numerische Mathematik kompakt, Vieweg, 2006 (S. 89, 90).
- Speziell zur Eigenwertberechnung: D. Scholz, Numerik interaktiv, Springer, 2016.
- Eine schöne Anwendung, bei der ein lineares Ausgleichsproblem zu lösen ist, findet sich in: M. Hochbruck, J. M. Sauter: Mathematik fürs Leben am Beispiel der Computertomographie, Math. Semesterber. 49 (2002), No. 1, S. 95-113.

### **3. Singulärwertzerlegung (SVD) von Matrizen – Bildkompression, maschinelle Erkennung handgeschriebener Texte, usw. (2 Sitzungen)**

- Die Singulärwertzerlegung – Existenz und Eigenschaften
- Abgeschnittene SVDs zur Matrixapproximation, Anwendung Bildkompression (z.B. in Demmel, S. 114ff.)
- Beweis der Bestapproximationseigenschaft (z.B. Elden)
- Anwendung zur Erkennung handgeschriebener Ziffern (Elden)
- Anwendungen: Hauptkomponentenanalyse (PCA), Text Mining, Schlüsselwortextraktion (Elden, Kap. 6, 11 und 13)

#### Literaturvorschläge:

- L. Elden: Matrix Methods in Data Mining and Pattern Recognition, SIAM, 2007.
- J.W. Demmel: Applied numerical linear algebra, SIAM, 1997.
- W. Dahmen, A. Reusken, Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Springer, 2006.

#### 4. Berechnung von Eigenwerten großer Matrizen – Der PageRank-Algorithmus von Google

(1 Sitzung)

- Modellierung des Page-Rank-Problems, der *random web surfer* und Charakterisierung als Markovkette (s. Elden)
- Von Page-Rank-Problem zur Eigenwertgleichung (Elden, Page)
- Vektoriteration zur Berechnung des größten Eigenwertes – Konvergenz der Vektoriteration, Konvergenzgeschwindigkeit (s. Elden, Scholz)
- Verbesserungen der Vektoriteration (Shift, Inverse Iteration)

#### Literaturvorschläge:

- L. Elden: Matrix Methods in Data Mining and Pattern Recognition, SIAM, 2007.
- D. Scholz: Numerik interaktiv, Springer, 2016.
- Originalarbeit: L. Page et al.: The PageRank Citation Ranking: Bringing Order to the Web. Technical Report. Stanford InfoLab, 1999.

**5. Diskrete Fourier-/Diskrete Kosinus-Transformation –  
Digitalisierung akustischer Signale, MP3**

**(2 Sitzungen)**

- Vorstellung der diskreten (!) Fouriertransformation und/oder Diskreten Kosinus-Transformation (als orthogonale Basistransformationen auf  $\mathbb{R}^n$ , Bezug auf (3A)), math. Eigenschaften
- Diskretisierung akustischer Daten, Erklärung von Orts- und Frequenzraum am Beispiel akustischer Daten
- Fast-Fourier-Transformation (s. Plato)
- Grobe Funktionsweise der MP3-Kompression und/oder JPEG-Kompression

Literaturvorschläge:

- R. Plato, Numerische Mathematik kompakt, Vieweg, 2006 , Kap. 3.
- D. Scholz, Numerik interaktiv, Springer, 2016, Kap. 9.
- T. Huckle, S. Schneider, Numerische Methoden – Eine Einführung für Informatiker, Naturwissenschaftler, Ingenieure und Mathematiker, Springer 2006.

## 6. Nichtlineare glatte Optimierung und das Newton-Verfahren

- Freie Optimierungsprobleme und Optimierungsprobleme mit Nebenbedingungen im  $\mathbb{R}^n$ .
- Methoden zur Behandlung von Optimierungsproblemen ohne Nebenbedingungen: Abstiegsverfahren, Armijo-Regel
- Newton-Verfahren zur Behandlung, Konvergenzeigenschaften
- Ausblick: Optimierungsprobleme mit Nebenbedingungen

### Literaturvorschläge:

- M. & S. Ulbrich, Nichtlineare Optimierung, Birkhäuser 2012.
- M. Pieper, Mathematische Optimierung. Springer 2017.

## 7. Numerische Integration – Gauß-Quadratur

- Idee der Gauß-Quadratur
- Handwerkszeug: Orthogonale Polynome
- Existenzbeweis für Gewichte/Stützstellen, Eigenschaften
- Praktische Berechnung der Gewichte
- Ausblick: Weitere Verfahren

### Literaturvorschläge:

- Freund/Hoppe (Hrsg.), Stoer/Burlisch: Numerische Mathematik I, Kap. 3.6., 10. Auflage, Springer, 2007.
- W. Dahmen, A. Reusken, Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Springer, 2006.

## 8. Das Verfahren der **Finiten Differenzen** für komplexe physikalische Phänomene (1 Sitzung)

- Randwertaufgaben, Beispiele
- Diskretisierung von Randwertaufgaben via Finite Differenzen
- Eigenschaften der linearen Gleichungssysteme, Lösbarkeitsaussagen

### Literaturvorschläge:

- D. Scholz, Numerik interaktiv, Springer, 2016, Kap. 9.
- W. Dahmen, A. Reusken, Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Springer, 2006 (Kp. 12.3, 14).

## 9. Modulares Potenzieren – Der RSA-Algorithmus in der Kryptographie

(1 Sitzung, Absprache mit Thema 10!)

- Modulares Potenzieren, Satz von Euler-Fermat, Beweis
- Erklärung des RSA-Verfahrens
- Warum ist Verschlüsseln mit RSA einfach – und Entschlüsseln schwer?  
(Erzeugung großer Primzahlen, Primzahltests)
- mögliche Angriffspunkte

### Literaturvorschläge:

- S. Müller-Stach, J. Piontkowski: Elementare und algebraische Zahlentheorie – Ein moderner Zugang zu klassischen Themen, Springer, 2011.
- C. Rousseau, Y. Saint-Aubin: Mathematik und Technologie. Springer Spektrum, 2008.
- Netzrecherche – das Thema ist recht populär.

## 10. Reed-Solomon-Codes – Fehlerkorrektur in Daten

(2 Sitzungen, Absprache mit Thema 9!)

- Primkörper, kleiner Satz von Fermat
- Fehlerkorrektur mit Reed-Solomon-Codes
- Codierung und Decodierung mit euklidischem Algorithmus

### Literaturvorschläge:

- M. und B. Bossert - Mathematik der digitalen Medien, Kapitel 5, VDE, 2010.

## 11. Erzeugung von Zufallszahlen (1 Sitzung)

- Anwendungsgebiete, Grundprinzipien, Anforderungen an Zufallsgeneratoren
- Lineare Kongruenzgeneratoren
- Satz 3.9 zur Periodenlänge von Linearen Kongruenzgeneratoren in Baumeister
- Ausblick: Gütetests für Zufallszahlen

### Literaturvorschläge:

- Baumeister, Numerische Methoden der Finanzmathematik (Kap. 3), online verfügbar unter <https://www.math.uni-frankfurt.de/~baumeist/n-shell.ps>
- M. Kolonko: Stochastische Simulationen, Springer, 2008.
- C. Rousseau, Y. Saint-Aubin: Mathematik und Technologie. Springer Spektrum, 2008.

## 12. Diskrete Optimierung – Das „Travelling Salesman“-Problem (1 Sitzung)

- Grundbegriffe der Graphentheorie, das Problem, seine Komplexität und seine Anwendungen
- Vorstellung heuristischer Verfahren, Abschätzungen (z.B. Greedy-Algorithmus, Nächster Nachbar, Spanning Tree, Christofides,...), Aufwandswabschätzungen
- Ausblick: Deterministische Algorithmen,  $P = NP$  und Nichtapproximierbarkeit

### Literaturvorschläge:

M. Grötschel, Schnelle Rundreisen: Das Travelling-Salesman-Problem. In: Hußmann, Lutz-Westphal (Hrsg.): Diskrete Mathematik erleben. Springer, 2015.

B. Korte, J. Vygen, Kombinatorische Optimierung. Theorie und Algorithmen. Springer, 2012.

Website zum TSP von Bill Cook, Geogia Tech, Atlanta: <http://www.math.uwaterloo.ca/tsp/>