MSG 2017/2018 — Zirkel 10a
Thorsten Rohwedder

Quer durch die Mittelstufengeometrie
– ab 23. März 2017 –

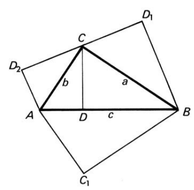
1. **Hat die Satzgruppe des Pythagoras ein neutrales Element?**

   Den Satz des Pythagoras, den Kathetensatz und den Höhensatz bezeichnet man zusammenfassend als die Satzgruppe des Pythagoras.

   (a) Formuliere die drei Sätze präzise. Was sind die Voraussetzungen, was die genauen Aussagen? Gelten die Umkehrungen?

   (b) Hat man einen Satz aus der Satzgruppe bereits bewiesen, so lassen sich andere Sätze sehr einfach mit dessen Hilfe beweisen. Wie? Welche? Finde Beispiele!

2. **Kathetendreiecke**

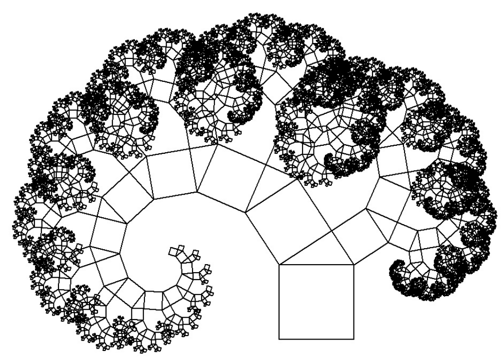
   „Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächen der Kathetendreiecke gleich der Fläche des Hypothenusendreiecks.“ – Stimmt das? Lässt sich das Ergebnis verallgemeinern?

3. **Der Pythagorasbaum**

   (a) Wenn die Seitenlänge des „Stammquadrats“ a ist – welche Fläche haben die Blätter so eines Pythagorasbaumes?

   (b) Berechne für einen fraktalen Pythagorasbaum, in dem nur gleichschenklige Dreiecke vorkommen, seine Höhe und seine Breite.

   (c*) Berechne seinen Umfang.

4. **Immer im Kreis**

   Der Sinus lässt sich als Projektion einer Kreisbewegung definieren, genauer: Als Projektion eines Zeigers, der mit einem Ende im Mittelpunkt eines Kreises befestigt ist und mit dem anderen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit auf dem Kreisbogen läuft.

   (a) Wie schnell dreht sich der Zeiger, dessen Projektion durch $f(t) = \sin(t)$ beschrieben wird?

   (b) Wie lautet die Funktionsgleichung einer doppelt so schnellen Kreisbewegung?

   (c) Welche Kreisbewegung wird durch $f(t) = 3\sin(\frac{1}{2}(t - \frac{\pi}{2}))$ beschrieben?

   (d) Die allgemeine Sinusfunktion hat Parameter $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Was bedeuten die Parameter für die Kreisbewegung, deren Projektion durch

   $$f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d$$

   beschrieben wird?

5. **Unverzichtbar: Der Sinussatz**

   Beweise, dass in jeden Dreieck, dessen Seitenlängen mit a, b, c und dessen Innenwinkel mit α, β, γ bezeichnet werden, wobei wie gewöhnlich α gegenüber von a, β gegenüber von b und γ gegenüber von c zu finden ist,

   $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

   gilt, wobei R den Radius des Umkreises bezechnet.

   (Bemerkung: Dies bedeutet, dass der Quotient aus Länge einer Seite des Dreiecks und dem Sinus des ihr gegenüberliegenden Winkels immer gleich ist, und dass diese Konstante genau dem Doppelten des Umkreisradius entspricht.)

6. **Unverzichtbar II: Der Cosinussatz**

   Beweise: Für die drei Seiten a, b und c eines Dreiecks sowie für den der Seite c gegenüberliegenden Winkel γ gilt:

   $$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma.$$

   Finde dann eine Bedingung für die Seitenlängen, die gleichwertig dazu ist, dass ein Dreieck einen stumpfen Winkel besitzt.

7. **Zwei Flächenformeln fürs Dreieck – beide schön**

   Zeige, dass sich der Flächeninhalt A in einem Dreieck ΔABC auf die folgenden zwei Weisen berechnen lässt.

   (a) Sind a und b zwei Seiten des Dreiecks und γ der von ihnen eingeschlossene Winkel, so gilt
   $$A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$
   (Gilt die Formel auch für stumpfwinklige Dreiecke?)

   (b) Bezeichnet $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ den halben Umfang des Dreiecks, so gilt
   $$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

8. **Endlich rechnen!**

   Vorbei sind die Tage, an denen man in einem Dreieck, deren sämtliche Größen (d.h. die Längen a, b, c und die Winkel α, β, γ) eindeutig festgelegt sind, diese nur dadurch herausbekam, dass man das Dreieck konstruierte und dann maß.
   Berechne die fehlenden der sechs Größen für Dreiecke mit den folgenden Maßen.

   (a) $a = 4{,}2$ cm$, b = 2$ cm$, c = 5$ cm

   (b) $\gamma = 47°, a = 4$cm$, b = 3{,}7$ cm

   (c) $\alpha = 37°, a = 5{,}5$ cm$, b = 2$ cm

   (d) $\alpha = 37°, a = 2$ cm$, b = 3{,}5$ cm

   (e) $\alpha = 37°, a = 2$ cm$, b = 3$ cm