Möbiustransformationen und Indras Perlen

Teilnehmer:

Maximilian Girke Andreas-Gymnasium Sami Kharma Andreas-Gymnasium Maurice Polczynski ${\it Heinrich-Hertz-Gymnasium}$ Jessica Richter Immanuel-Kant-Gymnasium Leonard Schmidt Käthe-Kollwitz-Gymnasium Pia Schünemann $K\"{a}the-Kollwitz-Gymnasium$ Justin-Jargal Sergelen Heinrich-Hertz-GymnasiumNiclas Thal Andreas-Gymnasium

Gruppen leiter:

Andreas Filler, Humboldt-Universität zu Berlin Laura Habermann, Humboldt-Universität zu Berlin



Indra ist eine buddhistische Göttin, welche für ihre Perlen bekannt ist. Sie zeichneten sich vor allem dadurch aus, dass sie sich alle unendlich oft in einander spiegelten. Diese mythologische Begebenheit wurde, in leicht abgewandelter Form, von Felix Klein in der Mathematik bearbeitet, womit er große Fortschritte in geometrischer Mathematik erreichte. Die bereits vor über 100 Jahren erzielten Ergebnisse sind heute durch technologische Fortschritte und weitere Arbeiten von Mumford, Series und Wright nutzbar, um beispielsweise die sogenannten 'Indras Perlen' zu konstruieren. Unsere Gruppe setzte sich in 4 Tagen intensiv mit Indras Perlen, den dafür notwendigen Möbiustransformationen und verschieden grundlegenden Begriffen wie dem Zahlenbereich der komplexen Zahlen und der Gruppentheorie auseinander.

Die Vision von Felix Klein

The question is ... what will be the position of the limiting points. There is no difficulty in answering these questions by purely logical reasoning; but the imagination seems to fail utterly when we try to form a mental image of the result.

Felix Klein in 'The mathematical character of space intuition', 1894

Felix Klein (1849-1925) war deutscher Mathematiker, der sich mit geometrischer Darstellung mathematischer Problematiken befasste. Bereits im Jahre 1897 war er in der Lage per Hand erstaunlich präzise Skizzen von Möbiustransformationen anzufertigen.

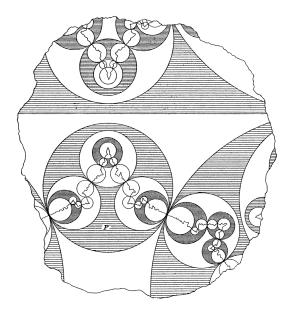


Abbildung 1: Zeichnung Felix Kleins 1897

Komplexe Zahlen

Die komplexen Zahlen $\mathbb C$ sind eine Erweiterung der reellen Zahlen, welche ursprünglich eingeführt wurden um die Gleichung $x^2+1=0$ zu lösen. Deshalb wurde die imaginäre Einheit i definiert. Eine komplexe Zahl z ist als Vektor in der Gauß'schen Zahlenebene mit reeller und imaginärer Achse darstellbar.

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$z = a + bi \ mit \ i^2 = -1$$

$$a = Realteil \ Re(z), \ b = Imagin \ddot{a}rteil \ Im(z)$$

Betrag:

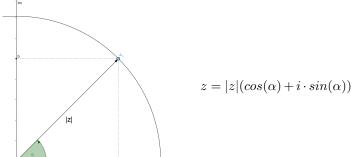
Geometrisch ist |z| die Länge des Vektors z.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Komplexe Konjugation:

Geometrisch ist die Konjugation eine Spiegelung an der reellen Achse.

$$\overline{z} = a - bi$$
 und es gilt $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

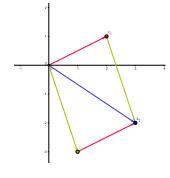


Trigonometrische Darstellung:

Addition:

Die rechnerisch vergleichbar zur Vektorrechnung ablaufende Addition zweier komplexer Zahlen bewirkt geome-

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$



Multiplikation:

$$z_1 \cdot z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$$

...mit einer reellen Zahl \rightarrow zentr. Streckung

... mit einer komplexen Zahl mit $|z| = 1 \rightarrow$ Drehung

...mit einer beliebigen komplexen Zahl \rightarrow Drehstreckung

Das Produkt eines Elements mit seinem Inversen ergibt das neutrale Element. 1+0i ist hierbei das neutrale Element der Multiplikation von komplexen Zahlen. D.h. zu z=a+bi wird die Zahl $z^{-1}=z'=a'+b'i$ mit $z\cdot z'=(aa'-bb')+i(ab'+ba')=1+0i$ gesucht.

Inverses Element der Multiplikation:

Wir erhalten die Bedingungen 1 = aa' - bb' und 0 = ab' + ba'. Damit ist $z' = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ und $|z'| = \frac{1}{|z|}$.

Die Gruppe der Möbiustransformationen

Die allgemeine Gleichung einer Möbiustransformation beschreibt eine gebrochenlineare Funktion mit Parametern a, b, c und d im Bereich der komplexen Zahlen $(z \in \mathbb{C})$.

$$M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

Wir nehmen zu \mathbb{C} den Punkt ∞ hinzu und definieren: $\frac{z}{0} := \infty$ und $\frac{z}{\infty} = 0$ für alle komplexen Zahlen z. Wenn wir für Möbiustransformationen außerdem fordern, dass die Determinate D(M) := ad - bd nicht Null sein darf, so ist sichergestellt, dass Werte wie $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ nicht als Bilder von Möbiustransformationen auftreten können. Damit sind alle Möbiustransformationen Abbildungen von $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ nach $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Spezielle Funktionswerte sind:

$$\begin{array}{cccc} z & \mapsto & \frac{az+b}{cz+d}, \\ -\frac{b}{a} & \mapsto & 0, \text{ falls } a \neq 0, \\ -\frac{d}{c} & \mapsto & \infty, \text{ falls } c \neq 0, \\ \infty & \mapsto & \frac{a}{c}. \end{array}$$

Transformationsarten

Eine Translation beschreibt eine Verschiebung in Richtung von b ($b \in \mathbb{C}$) durch Addition. Eine Drehstreckung wird durch einen Faktor a ($a \in \mathbb{C}$) ausgeführt und ist die Verbindung einer Drehung und einer Streckung. Eine Inversion bewirkt eine Kreisspiegelung mit anschließender Spiegelung an der reellen Achse

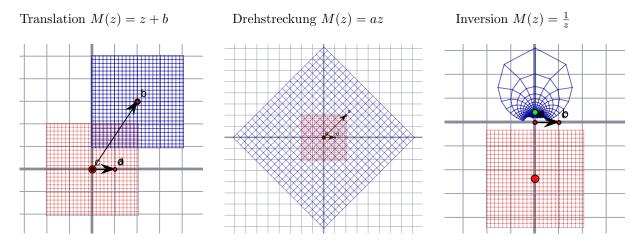


Abbildung 2: Spezielle Möbiustransformationen

${\bf Spezial f\"{a}lle}$

Es existieren besondere Koeffizientenkonstellationen:

$$c = 0$$
: $M(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = a^*z + b^*$

$$a = 0$$
: $M(z) = \frac{1}{c^* z + d^*}$ $M^*(z) = \frac{1}{z}$

Hierbei ist $M^*(z)$ ein Spezialfall des Falls a=0.

Die Gruppeneigenschaften

• Die Verknüpfung zweier Möbiustransformation (M_1, M_2) resultiert zu einer neuen Möbiustransformation:

$$(M_1 \circ M_2)(z) = \frac{a \cdot \frac{a'z+b'}{c'z+d'} + b}{c \cdot \frac{a'z+b'}{c'z+d'} + d} = \frac{(aa'+bc')z + (ab'+bd')}{(ca'+dc')z + (cb'+dd')}$$

- Assoziativität ist gegeben: $(M_1 \circ M_2) \circ M_3 = M_1 \circ (M_2 \circ M_3)$
- Existenz eines neutralen Elements: $\exists e \in G \text{ mit: } \forall g \in G : g \circ e = g.$ e ist die Identität, d.h. die Möbiustransformation mit der Abbildungsvorschrift: $e(z) = \frac{1z+0}{0z+1} = z.$

• Jedes Element M der Gruppe G muss ein zugehöriges inverses Element M^{-1} haben. Es muss also gelten $(M \circ M^{-1}) = e$, d.h. $M \circ M^{-1}(z) = z$ für alle komplexen Zahlen z. Durch Einsetzen der allgemeinen Gleichung zur Verknüpfung zweier Möbiustransformationen erhält man:

$$z = \frac{(aa' + bc')z + (ab' + bd')}{(ca' + dc')z + (cb' + dd')}$$

Da dies für alle komplexen Zahlen z gelten muss, müssen die folgenden Gleichungen erfüllt sein.

$$1 = aa' + bc',$$
 $1 = cb' + dd',$
 $0 = ab' + bd'$ und $0 = ca' + dc'.$

Man erhält die folgende Lösung, wobei D die Determinante ad - cb ist:

$$a' = \frac{d}{D}$$
 $b' = -\frac{b}{D}$
 $c' = -\frac{c}{D}$ $d' = \frac{a}{D}$

Somit ist bewiesen, dass jede Möbiustransformation M ein inverses Element M^{-1} besitzt:

$$M^{-1}(z) = \frac{\frac{d}{D} \cdot z + \left(-\frac{b}{D}\right)}{-\frac{c}{D} \cdot z + \frac{a}{D}}.$$

Rekonstruktion von Möbiustransformationen

Es existieren nur drei unabhängige komplexe Koeffizienten einer Möbiustransformation. Ein Koeffizient kann daher 1 gesetzt werden (hier d=1), um Redundanz unter den Transformationen zu vermeiden. Daher sind nur drei Punkte und ihre Bildpunkte nötig, um eine Möbiustransformation eindeutig zu rekonstruieren.

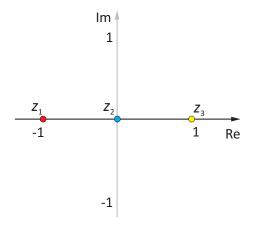
Beispiel für drei Punkte und ihre Bildpunkte:

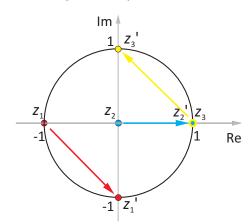
$$z_1 = -1 \mapsto z'_1 = -i$$

 $z_2 = 0 \mapsto z'_2 = 1$
 $z_3 = 1 \mapsto z'_3 = i$

Durch Lösen des Gleichungssystems, welches durch Einsetzen der Urpunkte und der jeweils zugehörigen Bildpunkte entsteht, erhält man $a=i,\,b=1$ und $c=\frac{1}{i}=-i$ und damit $M(z)=\frac{iz+1}{-iz+1}$.

Eine visuelle Darstellung des Beispiels (links: Urpunkte, rechts: Abbildung durch M):





Kreisgeradengleichung

Um zu zeigen, dass Möbiustransformationen Kreise und Geraden auf Kreise und Geraden abbilden, ist es hilfreich, dass man eine Kreisgeradengleichung für komplexe Zahlen findet. Geraden können allgemein durch die Geradengleichung $\beta x + \gamma y + \delta = 0$ dargestellt werden und Kreise mit der Kreisgleichung $(x-x_m)^2 + (y-y_m)^2 = r^2$ erzeugt werden, welche äquivalent zu $x^2 + y^2 - 2x_m x - 2y_m y + x_m^2 + y_m^2 - r^2 = 0$ ist. Man erkennt, dass $(x_m^2 + y_m^2 - r^2)$, $(-2x_m)$ und $(-2y_m)$ Konstanten sind. Durch Kombination der Geradengleichung und der Kreisgleichung erhält man die Kreisgeradengleichung $\alpha(x^2+y^2)+\beta x+\gamma y+\delta=0$ mit $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$. Für $\alpha\neq 0$ ergibt sich ein Kreis und für $\alpha=0$ eine Gerade.

In der Kreisgeradengleichung kann man x und y durch z und \bar{z} ersetzen, um mit komplexen Zahlen arbeiten zu können und man erhält folgende Gleichung:

$$\alpha(z\bar{z}) + \frac{(\beta - i\gamma)z}{2} + \frac{(\beta + i\gamma)\bar{z}}{2} + \delta = 0.$$

Jetzt substituiert man z durch $\frac{1}{z}$ und \bar{z} durch $\frac{1}{\bar{z}}$ (Betrachtung des Inversen).

$$\frac{\alpha}{(z\bar{z})} + \frac{(\beta-i\gamma)\frac{1}{z}}{2} + \frac{(\beta+i\gamma)\frac{1}{\bar{z}}}{2} + \delta = 0.$$

Durch Multiplikation mit $z\bar{z}$ sieht man, dass α und δ ihre Rolle getauscht haben und das Inverse der Möbiustransformation Kreise und Geraden auf Kreise und Geraden abbildet.

$$\alpha + \frac{(\beta - i\gamma)\bar{z}}{2} + \frac{(\beta + i\gamma)z}{2} + \delta(z\bar{z}) = 0.$$

Nun haben wir für die Inversion bewiesen, dass sie Kreise und Geraden auf Kreise und Geraden abbildet genauso wie Drehungen und Verschiebungen. Daraus folgt, dass Möbiustransformationen dies auch tun.

Fixpunkte von Möbiustransformationen

Definition 1. Punkte, die auf sich selbst abgebildet werden, also z_0 mit $M(z_0) = \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} = z_0$, werden Fixpunkte genannt (D = ad-bc \neq 0).

Als Beispiel betrachten wir die Verknüpfung einer Drehstreckung mit einer Verschiebung. Dabei sei z_0 ein Fixpunkt der Abbildung. Es gilt z' = az + b und $z_0 = az_0 + b$. Damit folgt $z' - z_0 = az + b - az_0 - b = a(z - z_0)$. Das ist eine Drehstreckung mit z_0 als Drehzentrum.

Um die Frage zu beantworten, wie viele Fixpunkte eine beliebige Möbiustransformation haben kann, formt man nach z_0 um:

$$\frac{az_0+b}{cz_0+d} = z_0$$

$$\leftrightarrow az_0+b = z_0(cz_0+d)$$

$$\leftrightarrow 0 = cz_0^2+dz_0-az_0-b$$

$$\leftrightarrow 0 = z_0^2+\frac{(d-a)z_0}{c}-\frac{b}{c}$$

$$\leftrightarrow z_0 = \frac{a-d\pm\sqrt{(d-a)^2+4bc}}{2c}$$

Möbiustransformationen können also höchstens 2 Fixpunkte haben. Falls die Diskriminante $(d-a)^2 + 4bc$ gleich Null ist, gibt es nur einen Fixpunkt.

Grenzpunkte

Definition 2. Grenzpunkte eine Möbiustransformation (auch: Häufungspunkte) sind Punkte, denen sich die Bildpunkte bei immer neuer Anwendung der Möbiustransformation beliebig dicht annähern.

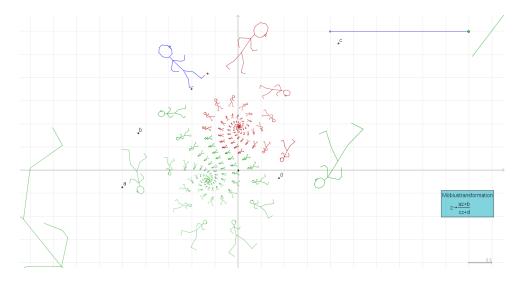
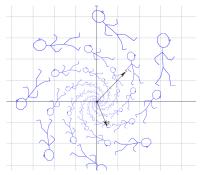


Abbildung 3: Grenzpunkte

Konjugation von Möbiustransformationen

Die Konjugation ist ein Verfahren zur Modulation von Fixpunkten im Unendlichen bzw. Endlichen.



Beispiel einer Möbiustransformation mit den Fixpunkten 0 und ∞

Dabei wird stets eine Möbiustransformationen mit einer Drehstreckung und ihrem inversem Element verknüpft.

Um nun anhand eines Beispiels zwei direkt bestimmbare Fixpunkte zu erreichen, wird eine Verknüpfung von einer Möbiustransformation mit Fixpunkt bei 0 und ∞ mit ihrer inversen Möbiustransformation, die diese beiden Punkte auf 1 und -1 abbildet und einer einfachen Drehstreckung verknüpft.

$$\widehat{T} = R \circ T \circ R^{-1}$$

$$0 \to -1 \quad \text{Drehstreckung} \quad \begin{array}{c} -1 \to 0 \\ \infty \to 1 \end{array} \quad +1 \to \infty$$

Dazu ein konkretes Beipiel:

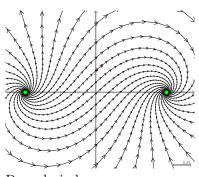
Es sei
$$R(z):=\frac{z-1}{z+1},\, T(z):=k\cdot z$$
 und damit $R^{-1}(z):=\frac{z+1}{-z+1}.$

Für die Verkettung erhält man:

$$\widehat{T}(z) = R(T(R^{-1}(z))) = \frac{k \cdot \frac{z+1}{-z+1} - 1}{k \cdot \frac{z+1}{-z+1} + 1} = \dots = \frac{z(k+1) + k - 1}{z(k-1) + k + 1}$$

Bei der Verkettung entsteht eine Doppelspirale, wie in der Abbildung gezeigt.

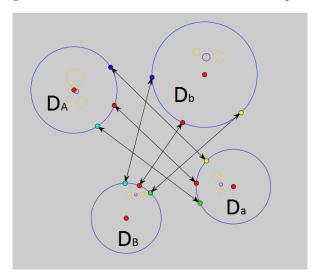
Das Bild entstand durch sehr viele Iterationen (mehrfache Ausführung) der Möbiustransformation hintereinander, symbolisiert durch die Pfeile (Pfeilanfang $\hat{=}$ Punkt und Pfeilspitze $\hat{=}$ Bildpunkt). Dadurch kann man die Grenzpunkte, welche zugleich die Fixpunkte sind, besonders gut erkennen.



Doppelspirale

Schottky-Gruppe

Eine Schottky-Gruppe besteht aus vier Schottky-Kreisen, beziehungsweise zwei Kreispaaren D_A , D_a und D_B , D_b . Zwischen ihnen finden inverse Möbiustransformationen statt (siehe Abbildung ??). Diese sind gekennzeichnet durch drei Punkt und ihre Bildpunkte.



Hierbei ist interessant, dass bei der Abbildung von z.B. a das Äußere aus dem Kreis D_A in das Innere des Kreises D_a abgebildet wird. Andersherum sowie für D_B , D_b gilt dasselbe.

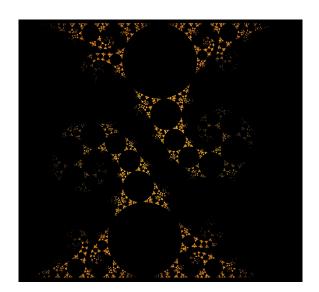
In der Abbildung sind weitere Kreise im Inneren zu erkennen. Diese sind eine Folge von weiteren Iterationen, ähnlich wie in der vorherigen Abbildung.

4 Möbiustransformationen:

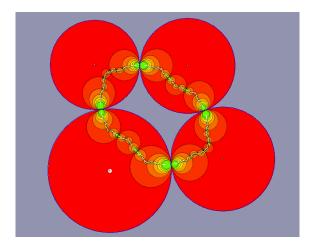
$$\begin{array}{ll} a:D_A\to D_a & \quad A=a^{-1}:D_a\to D_A \\ b:D_B\to D_b & \quad B=b^{-1}:D_b\to D_B \end{array}$$

Indras Perlen und Ketten

Durch "unendliche" Iterationen und das Betrachten von Grenzpunkten, hier weiß abgebildet, entstehen Gebilde, die als Indras Perlen und Ketten bezeichnet werden.



Die Grenzpunkte bilden faszinierende Formationen - die Indras Perlen.



Die Grenzpunkte verbinden sich zu einer zusammenhängenden Kette.

Hier gut erkennbar ist die "gefangene" Unendlichkeit.