Paradoxe Teilmengen der Ebene

Teilnehmer:

Jennifer Arlt	Käthe-Kollwitz-Gymnasium
Paul Henrik Nikolas Barth	Herder-Gymnasium
Ekin Ergen	Özel Alman Lisesi (Istanbul)
Sophie Gehricke	Käthe-Kollwitz-Gymnasium
Arik Georgiew	Käthe-Kollwitz-Gymnasium
Hanke Guo	Herder-Gymnasium
Nils Matti	Immanuel-Kant-Gymnasium
David Schuppert	Heinrich-Hertz-Gymnasium

Gruppenleiter:

Konrad Gröger, Humboldt-Universität zu Berlin
Viola Schmidt, Humboldt-Universität zu Berlin

Paradoxe Teilmengen der Ebene

Die polnischen Mathematiker Wacław Sierpiński und Stefan Mazurkiewicz haben 1914 ein Beispiel von drei Teilmengen X, Y, Z der Ebene angegeben, für die Folgendes gilt:

1. Es ist $X = Y \cup Z \neq \varnothing$ und $Y \cap Z = \varnothing$.

2. Die Menge Y geht aus X durch eine Drehung hervor und die Menge Z ergibt sich aus X durch eine Verschiebung. Es ist also die nichtleere Menge X Vereingung zweier durchschnittsfremder Teilmengen, von denen jede zur Gesamtmenge X kongruent ist.

Auf den ersten Blick erscheint das Ergebnis paradox. Es ist schwer vorstellbar, dass es eine Menge mit den genannten Eigenschaften tatsächlich gibt. Der Sachverhalt widerspricht der intuitiven Vorstellung, die man sich von Kongruenz macht. Eine Teilmenge der Ebene, die zwei durchschnittsfremde Teilmengen enthält, von denen jede zur Gesamtmenge kongruent ist, wird heute *paradoxe Menge* genannt.

Man kann also sagen, dass Sierpiński und Mazurkiewicz ein konkretes Beispiel einer paradoxen Teilmenge der Ebene konstruiert haben.

Sierpiński und Mazurkiewicz sind bei ihrer Konstruktion von ganz elementaren Aussagen über Folgen natürlicher Zahlen ausgegangen. Sie haben diese Aussagen dann in solche über Teilmengen der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$ „übersetzt". Die Übersetzung wird mit Hilfe einer speziellen Abbildung ζ bewerkstelligt, für deren Definition man eine transzendente komplexe Zahl vom Betrag 1 benötigt. Die Benutzung von $\mathbb{C}$ als Modell der Ebene hat den Vorzug, dass sich Drehungen und Verschiebungen der Ebene durch Multiplikation und Addition beschreiben lassen.

Die Gruppe hat sich zunächst das Beispiel von Sierpiński und Mazurkiewicz erarbeitet und anschließend durch Verfeinerung der zuvor benutzten Aussagen weitere Zerlegungen spezieller Mengen X in endlich oder abzählbar viele paarweise durchschnittsfremde, aber zu X kongruente Teilmengen gefunden. Die Gruppe hat außerdem eine alternative Beschreibung spezieller paradoxer Mengen kennen gelernt.

Es ist klar geworden, dass paradoxe Mengen und ihre Zerlegungen für die Definition eines „Maßes" von Mengen wichtig sind.

Grundbegriffe

Definition 1. Eine Abbildung $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt *Kongruenzabbildung*, wenn

$$|F(z_1) - F(z_2)| = |z_1 - z_2|$$

für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt.

Beispiele. Kongruenzabbildungen der Ebene sind

- Verschiebungen,
- Drehungen und
- Spiegelungen.

Wir haben uns bei der Definition 1 auf Kongruenzabbildungen der komplexen Zahlenebene beschränkt, weil sich in diesem Fall die Kongruenzabbildungen in einfacher Weise durch Rechenoperationen für komplexe Zahlen beschreiben lassen (Drehungen durch Multiplikation, Verschiebungen durch Addition). Der Zusammenhang zwischen Rechenoperationen für komplexe Zahlen und Abbildungen ist schon in dem vorangehenden Bericht über Möbiustransformationen dargestellt worden.

Nun können wir Kongruenz von allgemeinen Punktmengen bzw. Mengen komplexer Zahlen definieren:

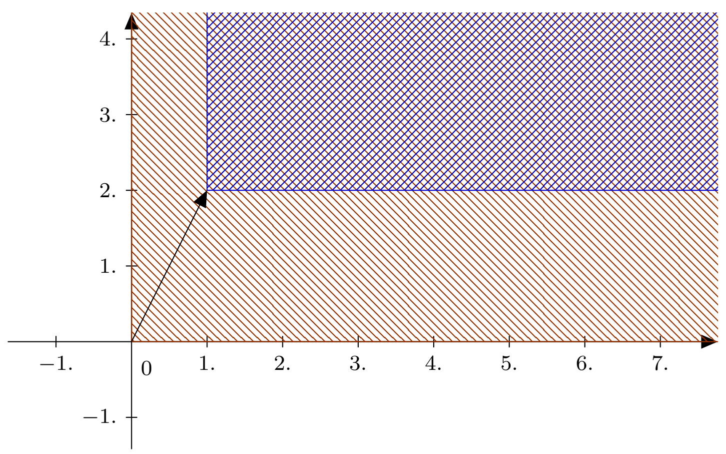
Definition 2. Zwei Mengen $X, Y \subset \mathbb{C}$ heißen *kongruent*, wenn es eine Kongruenzabbildung $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gibt, sodass

$$Y = F[X]$$

gilt.

Bemerkung 1. Hierbei ist $F[X] = \{F(z);\ z \in \mathbb{C}\}$. Diese Bezeichnungsweise wird später auch bei anderen Abbildungen verwendet.

Kongruenz zu echten Teilmengen Es ist bei der Betrachtung von kongruenten Mengen nur schwer vorstellbar, dass es Mengen gibt, die zu einer echten Teilmenge von sich selbst kongruent sind. Ein einfaches Beispiel stellt ein Quadrant in einem Koordinatensystem dar: Wenn man den ersten Quadranten nach rechts und nach oben verschiebt, erhält man eine echte Teilmenge des Quadranten.



Hier haben wir die Menge einfach in die Unendlichkeit verschoben.

Es gibt aber auch beschränkte Mengen, die kongruent zu einer echten Teilmenge von sich selbst sind. Ein Beispiel erhält man, wenn man die natürlichen Zahlen auf den Einheitskreis aufwickelt. Wir können allgemein mit dem Punkt 1 beginnen und dann immer um einen Winkel φ drehen. Dann ergibt sich die Menge

$$E = \{1, \rho, \rho^2, \rho^3, \dots\}$$

mit $\rho = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$, die bei Drehung um φ in

$$\{\rho, \rho^2, \rho^3, \dots\} = E \backslash \{1\}$$

übergeht. Dies gilt aber nur dann, wenn keine zwei Elemente aus E übereinstimmen, d. h. wenn es keine $n, m \in \mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$ gibt, für die $\rho^n = \rho^m$ ist. Es muss also $\rho^n \neq 1$ sein für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\rho^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$ gilt dies nur dann, wenn es keine $n, k \in \mathbb{N}$ gibt mit $n\varphi = 2\pi k$, also wenn $\frac{2\pi}{\varphi}$ irrational ist.

Definition 3. Wir führen an dieser Stelle Bezeichnungen für zwei spezielle Kongruenzabbildungen ein, die wir später benötigen. Wir definieren $S : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch die Vorschrift

$$S(z) := \rho z, \quad T(z) := z + 1 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Hierbei bezeichnet ρ eine fixierte komplexe Zahl mit der Eigenschaft $|\rho| = 1$. Es gilt also für einen Winkel φ die Gleichung $\rho = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Dementsprechend ist $S(z)$ das Bild von z bei der Drehung der komplexen Ebene um den Nullpunkt um den Winkel φ. Offensichtlich ist $T(z)$ das Bild von z bei der Verschiebung der komplexen Ebene um 1 in Richtung der reellen Achse.

Hilfskonstruktion

Nun wird eine Menge A definiert, deren Sinn im späteren Verlauf des Berichtes klarer wird.

Definition 4. Sei A die Menge aller Folgen $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$, wobei $a_n \in \mathbb{N}$ und nur endlich viele $a_n \neq 0$ sind. Außerdem sei

$$B := \{a \in A; a_0 = 0\}, \qquad C := \{a \in A; a_0 \neq 0\}.$$

Man kann erkennen, dass $A = B \sqcup C$ ist, d. h., dass der Durchschnitt von B und C leer ist und dass A die Vereinigungsmenge von B und C ist.

Zusätzlich werden zwei Abbildungen σ und τ definiert, die A in A abbilden.

Definition 5. Wir setzen

$$\sigma(a) := (0, a_0, a_1, a_2, a_3, \dots), \quad \tau(a) := (a_0 + 1, a_1, a_2, a_3, \ldots) \text{ für } a = (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots).$$

Die Folge $\sigma(a)$ entsteht also aus der Folge a durch Voranstellen einer Null. Die Folge $\tau(a)$ entsteht aus a durch Addition von 1 zum ersten Folgenglied. Es ist offensichtlich, dass die Folge $\sigma(a)$ zu B gehört und die Folge $\tau(a)$ zu C. Es gilt sogar

Satz 1. *Es ist $\sigma[A] = B$ und $\tau[A] = C$.*

Beweis: Zu zeigen ist, dass jedes Element $b \in B$ ein Bild von einem $a \in A$ bei der Abbildung σ ist. Ist $b := (0, b_1, b_2, ...)$, so leistet $a := (b_1, b_2, ...)$ das Verlangte, d.h., es ist $\sigma(a) = b$. Analog Beweist man die zweite Behauptung. $\square$

Übersetzung in $\mathbb{C}$

Wir definieren eine Abbildung $\zeta : A \to \mathbb{C}$ durch die Vorschrift

$$\zeta(a) := \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \rho^k \text{ für } a \in A. \tag{2}$$

Weil nur endlich viele der Zahlen a_k von Null verschieden sind, ist die Summe in (**??**) nur formal eine unendliche Summe. Die Zahl ρ ist hierbei die schon im ersten Abschnitt fixierte Zahl, die zur Definition der Drehung S benutzt worden ist (siehe (**??**)).

Satz 2. *Die zuvor definierten Abbildungen genügen den Beziehungen $\zeta \circ \sigma = S \circ \zeta$ und $\zeta \circ \tau = T \circ \zeta$.*

Beweis: Aus (**??**) und der Definition von σ und τ folgt

$$\zeta(\sigma(a)) = \sum_{k>0} a_{k-1}\rho^k = \rho \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j \rho^j = \rho\,\zeta(a) = S(\zeta(a)) \text{ für } a \in A. \tag{3}$$

Folglich ist $\zeta \circ \sigma = S \circ \zeta$. Die zweite Behauptung ergibt sich analog. □

Die Aussage des Satzes wird im unten stehenden Diagramm veranschaulicht. Der Satz besagt, dass man ausgehend von der linken oberen Ecke zum gleichen Ergebnis gelangt, wenn man zuerst dem horizontalen und dann dem vertikalen Pfeil folgt oder zuerst dem vertikalen Pfeil und dann dem horizontalen Pfeil.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\sigma \text{ bzw. } \tau"] \arrow[d, "\zeta"'] & A \arrow[d, "\zeta"] \\
\mathbb{C} \arrow[r, "S \text{ bzw. } T"] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

Definition 6. Eine komplexe Zahl z heißt *transzendent*, wenn sie nicht Nullstelle eines nichttrivialen Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten ist. Es ist also

$$\sum_{k=0}^{n} g_k z^k \neq 0,$$

falls die g_k ganze Zahlen sind, die nicht alle gleich Null sind.

Der Beweis der Existenz transzendenter Zahlen lässt sich ausführlich im Bericht der Sommerschule der Humboldt-Universität „Die Quadratur des Kreises“ vom Jahr 2014 nachlesen. Von der oben geschilderten Definition ausgehend, lässt sich ein Satz formulieren.

Satz 3. *Ist ρ transzendent, so gilt $\zeta(a) \neq \zeta(b)$ falls $a \neq b$ mit $a, b \in A$. Diese Eigenschaft wird als Injektivität bezeichnet.*

Beweis: Der Beweis wird indirekt geführt. Angenommen es gelte $a \neq b$, aber $\zeta(a) = \zeta(b)$. Ist $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ und $b = (b_0, b_1, b_2, \ldots)$, so liefert die Annahme $\zeta(a) = \zeta(b)$ die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \rho^k, \tag{4}$$

also auch

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - b_k)\rho^k. \tag{5}$$

Da nur endlich viele Koeffizienten von Null verschieden sind, gilt für genügend groß gewähltes n:

$$0 = \sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k)\rho^k \tag{6}$$

Dies ist ein Widerspruch zur Bedingung, dass ρ transzendent ist, da diese Gleichung nur erfüllt wäre, wenn ρ eine Nullstelle wäre. Man benutzt, dass auf Grund der Voraussetzung $a \neq b$ nicht alle Koeffizienten $a_k - b_k$ des letzten Polynoms gleich Null sind. $\square$

Hauptsatz (Satz von Sierpiński und Mazurkiewicz aus dem Jahr 1914)

Satz 4. (Hauptsatz)

Es sei $X := \zeta[A]$, $Y := \zeta[B]$ und $Z := \zeta[C]$.

Dann gilt: $X = Y \sqcup Z$, $Y = S[X]$ und $Z = T[X]$.

Beweis:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & \text{Injektivität von } \zeta \text{ impliziert } Y \cap Z = \varnothing \\ 2. & A = B \cup C \text{ impliziert } \zeta[A] = \zeta[B] \cup \zeta[C] \iff X = Y \cup Z \end{array}\right\} X = Y \sqcup Z$$

3. $Y = \zeta[B] = \zeta[\sigma[A]] = \zeta \circ \sigma[A] = S \circ \zeta[A] = S[\zeta[A]] = S[X]$
4. $Z = \zeta[C] = \zeta[\tau[A]] = \zeta \circ \tau[A] = T \circ \zeta[A] = T[\zeta[A]] = T[X]$

$\square$

Es ist also X die Vereinigung zweier disjunkter Teilmengen, die beide zu X kongruent sind, denn Y entsteht aus X durch Drehung und Z entsteht aus X durch Verschiebung. Damit ist gezeigt, dass es paradoxe Teilmengen von $\mathbb{C}$ tatsächlich gibt.

Zerlegungsvarianten

Behauptung. Auch die Teilmenge Y ist Vereinigung zweier disjunkter Teilmengen, die zu Y kongruent sind.

Beweis: Es gilt $Y \subset X \Rightarrow S[Y] \subset S[X] = Y \Rightarrow S[S[X]] \subset Y$ und $T[X] \subset X \Rightarrow S[T[X]] \subset S[X] = Y$. Aus $S[X] \cap T[X] = \varnothing$ folgt $S[S[X]] \cap S[T[X]] = \varnothing$. Daher gilt $Y = S[S[X]] \sqcup S[T[X]]$.Weil die hier auftretenden Teilmengen von Y durch Drehung bzw. Verschiebung und Drehung aus X entstehen, sind sie zu X und damit auch zu Y kongruent. $\square$

Folgerung 1. *Die Menge X kann als Vereinigung* dreier *paarweise disjunkter Teilmengen ausgedrückt werden, von denen jede zu X kongruent ist.*

Definition 7. Es sei $B_n \subset A$ durch die Vorschrift $B_n := \{a \in A | a_0 = n\}$ für $n \in \mathbb{N}$ definiert.

Offensichtlich ist $B_{n+1} = \tau[B_n]$ für $n \in \mathbb{N}$ und $A = B_0 \sqcup B_1 \sqcup B_2 \sqcup \cdots$. Außerdem ist $B_0 = B$.

Definition 8. Wir setzen $Y_n := \zeta[B_n]$ für $n \in \mathbb{N}$.

Aus der Injektivität von ζ folgt, dass alle Y_n paarweise disjunkt sind. Aus $B_{n+1} = \tau[B_n]$ folgt

$$Y_{n+1} = \zeta[B_{n+1}] = \zeta[\tau[B_n]] = T[\zeta[B_n]] = T[Y_n].$$

Deshalb entsteht Y_{n+1} aus Y_n durch Verschiebung. Folglich sind alle Y_n zu $Y_0 = Y$ kongruent (und damit auch zu X kongruent). Aus der Gleichung $A = B_0 \sqcup B_1 \sqcup B_2 \sqcup \cdots$ folgt mit Hilfe der Abbildung ζ außerdem

$$X = Y_0 \sqcup Y_1 \sqcup \cdots = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} Y_n. \tag{7}$$

Somit gilt

Folgerung 2. *Die Menge X ist auch die Vereinigung* abzählbar vieler *paarweise disjunkter Mengen, die alle zu X kongruent sind.*

Alternative Konstruktion

Überlegung. Die folgende Überlegung entsteht aus der Idee, eine paradoxe Menge X auch ohne die Zuhilfenahme der Menge A und der Abbildung ζ zu konstruieren. Dazu wird der Begriff der *abgeschlossenen Menge* definiert:

Definition 9. Eine Menge $E \subset \mathbb{C}$ heißt *abgeschlossen*, wenn

1. $0 \in E$ und

2. $S[E] \subset E$, $T[E] \subset E$.

Beispiel 1. $\mathbb{C}$ ist abgeschlossen.

Beispiel 2. Die Menge

$$V := \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k \rho^k ; n \in \mathbb{N}, a_k \in \mathbb{N}, k = 0, \ldots, n \right\}$$

ist abgeschlossen.

Aus der Definition der Abgeschlossenheit folgt direkt folgendes:

Lemma 1. *Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist wieder abgeschlossen.*

Somit gibt es also eine „minimale“ abgeschlossene Menge, die aus dem Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen gebildet wird:

Definition 10. Es sei X der Durchschnitt aller abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{C}$. Außerdem sei

$$Y := S[X], \qquad Z := T[X].$$

Man beachte, dass X, Y, Z hier anders definiert worden sind als im Hauptsatz oben.

Satz 5. *Es ist $X = Y \sqcup Z$.*

Beweis: Wir zeigen zuerst $X = Y \cup Z$. Dazu definieren wir $U := Y \cup Z$ und zeigen dann $X = U$.

Aus der Abgeschlossenheit von X folgt

$$Y = S[X] \subset X \ , \ Z = T[X] \subset X \implies U \subset X. \tag{8}$$
$$U \subset X \iff S[U] \subset S[X] = Y \subset U, \tag{9}$$
$$U \subset X \iff T[U] \subset T[X] = Z \subset U. \tag{10}$$

$$\begin{aligned} (\textbf{??}) \wedge (\textbf{??}) &\implies \text{U ist abgeschlossen} \\ &\implies X \subset U. \end{aligned}$$

Mit (**??**) folgt $X = U = Y \cup Z$.

Nun zeigen wir $Y \cap Z = \varnothing$ indirekt. Wir nehmen also an, es gäbe ein $z \in Y \cap Z$. Dann müsste z sowohl durch Drehung eines Elementes aus X, als auch durch Verschiebung eines Elementes aus X entstehen:

$$\begin{aligned} z = S(z_1), z_1 \in X, \qquad z = T(z_2), z_2 \in X \\ \iff S(z_1) = T(z_2) \\ \iff \rho z_1 = z_2 + 1. \end{aligned}$$

Weil $X \subset V$ gilt, sind auch $z_1, z_2 \in V$. Folglich gilt eine Gleichung der Form

$$\begin{aligned} \rho \sum_{k=0}^{n} a_k \rho^k = \sum_{l=0}^{n} b_k \rho^k + 1, \qquad \text{wobei alle } a_k, b_k \in \mathbb{N} \\ \iff \rho \sum_{k=0}^{n} a_k \rho^k - 1 - \sum_{l=0}^{n} b_k \rho^k = 0, \qquad a_k, b_k \in \mathbb{N} \\ \iff \sum_{k=0}^{n} a_k \rho^{k+1} - \sum_{l=0}^{n} b_k \rho^k - 1 = 0, \qquad a_k, b_k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Weil nun $-b_0 \leq 0$ ist, ist $-b_0 - 1 < 0$. Es handelt sich also auf der linken Seite der letzten Gleichung um ein nichttriviales Polynom. Aufgrund der Transzendenz von ρ ist jedoch die letzte Gleichung nicht möglich. Somit hat sich ein Widerspruch ergeben.

Aus $Y \cap Z = \varnothing$ und $X = Y \cup Z$ ergibt sich $X = Y \sqcup Z$. $\square$

Da nach Definition $Y = S[X]$ und $Z = T[X]$ ist, ist uns tatsächlich die Konstruktion einer paradoxen Menge nach Sierpiński und Mazurkiewicz auch ohne Verwendung der Hilfsmenge A gelungen.

Die Existenz paradoxer Mengen zeigt, dass sich hinter dem Begriff *Kongruenz von Punktmengen* mehr verbirgt, als man bei der Betrachtung kongruenter Figuren (wie etwa Dreiecken) erwarten würde.