

Berichte der Gruppen

Zykloiden und das Tautochronenproblem

Teilnehmer:

Mohammad-Yasin Arif	Heinrich-Hertz-Gymnasium
Karl Bendler	Heinrich-Hertz-Gymnasium
Richard Kindler	Heinrich-Hertz-Gymnasium
Felix Mehlig	Heinrich-Hertz-Gymnasium
Bianca Meske	Immanuel-Kant-Gymnasium
Dan Peter Neacsu	Heinrich-Hertz-Gymnasium
Ivo Richert	Heinrich-Hertz-Gymnasium

Gruppenleiter:

Luise Fehlinger	Humboldt-Universität zu Berlin
Sandra Ebel	Humboldt-Universität zu Berlin



Zykloiden und das Tautochronenproblem

Manch einer hat als Kind vielleicht stundenlang mit einem Spirographen Bilder gemalt – eine tolle Beschäftigung und eine Möglichkeit ganz schnell haufenweise Weihnachtsgeschenke zu produzieren. Aber hinter diesen Spirographen steckt sehr viel mehr. Und die damit erzeugten Kurven – sogenannte Zykloiden – haben die Mathematiker insbesondere im 17. Jahrhundert fasziniert.

Im Physikunterricht wurden sicherlich Fadenpendel besprochen und die Schwingungsdauer näherungsweise als $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ berechnet. Gesucht wurde damals eine exakte Lösung für ein sogenanntes tautochrones Pendel, dessen Schwingungsdauer nicht von der Auslenkung abhängt. Christiaan Huygens beschrieb 1673 ein Zykloidenpendel, welches das Tautochronenproblem löst.

Wir werden zunächst Zykloiden genauer untersuchen und beschreiben und diese auch mit Hilfe von GeoGebra zeichnen. Dabei werden wir uns nicht nur auf Kreise, die auf Geraden rollen, beschränken. Wir werden dann Evoluten von Zykloiden für eine Realisierung eines Zykloidenpendels nutzen. Schließlich werden wir uns an eine exakte Lösung des Tautochronenproblems wagen.

Das mathematische Pendel

Ein mathematisches Pendel ist ein ideales Fadenpendel, bei dem Luftwiderstand und Gewicht des Fadens vernachlässigt werden.

Das Pendel sei beim Start um Winkel α ausgelenkt. Auf den Pendelkörper wirkt nur die Gewichtskraft. Diese zerlegt sich in die Normalkraft – parallel zum Faden – und die tangentielle Komponente, welche eine Beschleunigung des Pendels bewirkt. Dabei wirkt diese Kraft aber entgegengesetzt zum Auslenkungswinkel α .

Somit gilt $F_t(\alpha) = \sin(-\alpha) \cdot F_g = -\sin(\alpha) \cdot m \cdot g$.

Diese Kraft wirkt auf Pendel mit kurzer Fadenlänge genauso, wie auf Pendel mit langer Fadenlänge – bewirkt also die Tangentialbeschleunigung, die sich aus der zweifachen Ableitung des Weges nach der Zeit ergibt: $a(t) = \frac{d^2}{dt^2}s(t) = \frac{d^2}{dt^2}(\ell \cdot \alpha)$, wobei ℓ die Länge des Pendels ist.

Für die Beschleunigung gilt also $\alpha'' \cdot m \cdot \ell = -\sin(\alpha) \cdot g \cdot m$. Umstellen nach der Beschleunigung ergibt $\alpha'' = -\sin(\alpha) \cdot \frac{g}{\ell}$.

Wir lösen die Differentialgleichung näherungsweise mit $\sin(\alpha) \approx \alpha$. D.h.

$$\alpha'' = -\alpha \cdot \frac{g}{\ell}.$$

Ein solches Verhalten kennen wir von der Sinus- und von der Kosinusfunktion. Wir versuchen den Ansatz $\alpha(t) = \cos(ct + \alpha_0)$ bzw. $\alpha(t) = \sin(st + \alpha_1)$.

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &= -\left(c^2 \cos(ct + \alpha_0)\right) & \text{bzw.} & \quad \alpha''(t) = -\left(s^2 \sin(st + \alpha_1)\right) \\ &\stackrel{!}{=} -\alpha \cdot \frac{g}{\ell} & & \quad \stackrel{!}{=} -\alpha \cdot \frac{g}{\ell} \end{aligned}$$

Folglich muss $c^2 = s^2 = \frac{g}{\ell}$ gelten. Und alle Linearkombinationen

$$\alpha(t) = A \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t + \alpha_0\right) + B \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t + \alpha_1\right)$$

erfüllen die Differentialgleichung. Damit beträgt aber die Schwingungsdauer gerade $\sqrt{\frac{\ell}{g}} \cdot 2\pi$, weil sich nach dieser Zeit das System zum ersten Mal wieder im Startzustand befindet.

Also hängt beim mathematischen Pendel die Schwingungsdauer zumindest näherungsweise nicht vom Startwinkel ab. Ein solches Pendel nennt man tautochrones Pendel.

Wie gut diese Näherung ist, haben wir experimentell untersucht und festgestellt, dass das mathematische Pendel doch stark von einem tautochronen Pendel abweicht.

Startwinkel	Schwingungsdauer
5°	2,12s
15°	2,12s
30°	2,36s
80°	2,4s

Kurven und ihre Eigenschaften

Definition 1. Eine parametrisierte ebene Kurve ist eine mindestens zweimal stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$. Dabei ist I ein reelles Intervall.

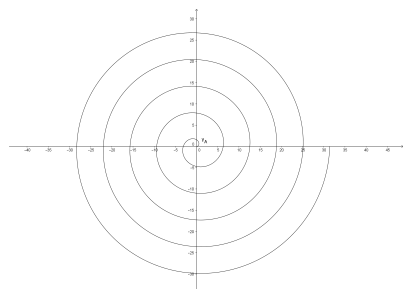
Zum Beispiel können wir den Einheitskreis als eine parametrisierte Kurve darstellen:

$$\begin{aligned} \gamma_K : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \varphi &\mapsto \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Weitere Beispiele sind archimedische und logarithmische Spiralen. Bei einer archimedischen Spirale wächst der Radius linear mit dem Umlaufwinkel, bei einer logarithmischen wächst er exponentiell. Wir erhalten die folgenden Parametrisierungen:

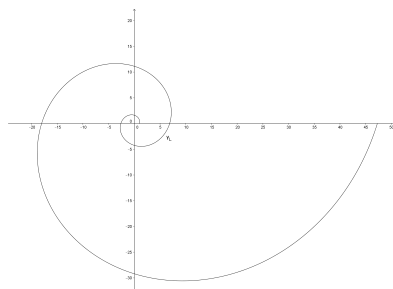
archimedische Spirale

$$\begin{aligned} \gamma_a(\varphi) &= \begin{pmatrix} c \cdot \varphi \cdot \cos \varphi \\ c \cdot \varphi \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} \\ &= c \cdot \varphi \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \end{aligned}$$



logarithmische Spirale

$$\begin{aligned} \gamma_l(\varphi) &= \begin{pmatrix} e^\varphi \cdot \cos \varphi \\ e^\varphi \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} \\ &= e^\varphi \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



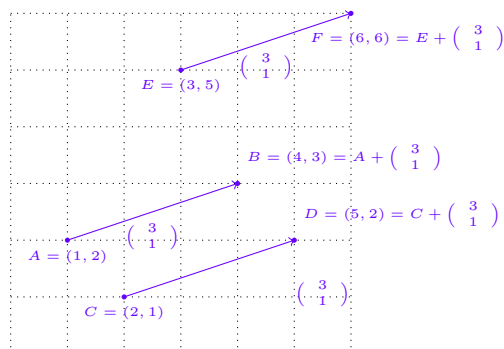
Vektoren

Kurven lassen sich gut mit Vektoren beschreiben.

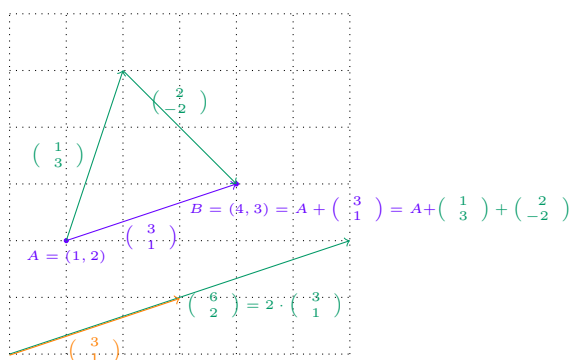
Wir sind gewohnt mit Koordinaten zu arbeiten. Wir legen den Koordinatenursprung und die Achsen (d.h. zwei Richtungen und Einheiten in jeder Richtung) fest. Dann können wir allen Punkten der Ebene eindeutig Koordinaten zuordnen und haben umgekehrt zu jedem Koordinatenpaar einen eindeutig bestimmten Punkt.

Wie kommen wir von einem Punkt zum anderen?

Wir können uns mit Vektoren von einem Punkt zum anderen bewegen, ...



...zwei Vektoren addieren und Vektoren mit Skalaren (reellen Zahlen) multiplizieren.



Das geht natürlich auch in höheren Dimensionen.

Definition 2. Ein reeller Vektorraum ist eine Menge V mit zwei Verknüpfungen

- $+: V \times V \longrightarrow V$, welche assoziativ und kommutativ ist, es gibt ein neutrales Element und zu jedem Vektor einen inversen Vektor,
- $\cdot: \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$, welche assoziativ ist, die $1 \in \mathbb{R}$ ist neutrales Element,
- beide Verknüpfungen erfüllen die Distributivgesetze.

Definition 3. Ein affiner Raum über einem Vektorraum V ist eine Menge $\mathcal{A} \neq \emptyset$ mit einer Abbildung $+: \mathcal{A} \times V \longrightarrow \mathcal{A}$, so dass gilt:

- $\forall a \in \mathcal{A}, v, w \in V: (a + v) + w = a + (v + w),$
- $\forall a, b \in \mathcal{A}: \exists! v \in V: b = a + v.$

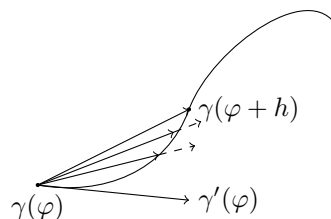
Die Elemente von $\mathcal{A}$ nennen wir Punkte.

Unsere Kurven sind also Teilmengen des affinen Raumes $\mathbb{R}^2$ mit dem zugehörigen Vektorraum $\mathbb{R}^2$.

Nun können wir (lokale) Änderungen der Punkte $\gamma(\varphi)$ in Abhängigkeit von φ untersuchen. Es sei $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine parametrisierte Kurve und $(\varphi - \delta, \varphi + \delta) \subset I$.

Wir betrachten die lokale Änderung:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(\varphi+h)-\gamma(\varphi)}{h} &= \frac{1}{h} \left(\begin{pmatrix} \gamma_1(\varphi+h) \\ \gamma_2(\varphi+h) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_1(\varphi) \\ \gamma_2(\varphi) \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1(\varphi+h)-\gamma_1(\varphi)}{h} \\ \frac{\gamma_2(\varphi+h)-\gamma_2(\varphi)}{h} \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \gamma'_1(\varphi) \\ \gamma'_2(\varphi) \end{pmatrix} \\ &=: \gamma'(\varphi) \end{aligned}$$



Aus der graphischen Betrachtung erkennen wir, dass $\gamma'(\varphi)$ ein Vektor in Richtung der Tangente an die parametrisierte Kurve im Punkt $\gamma(\varphi)$ ist. Wir können ihn also nutzen, um die Tangente an γ im Punkt $\gamma(\varphi)$ zu bestimmen.

Wir können Tangenten an Graphen von reellen Funktionen bereits bestimmen.

$$f : (0, \infty) \ni t \mapsto \frac{1}{t} \in \mathbb{R}$$

Die Tangente im Punkt $(t_0, f(t_0))$ ist dann: $Tan_{(t_0, f(t_0))}(x) = -\frac{1}{t_0^2}x + \frac{2}{t_0}$.

Nun stellen wir den Graph von f als parametrisierte Kurve im $\mathbb{R}^2$ dar.

$$\gamma : (0, \infty) \ni t \mapsto (t, \frac{1}{t}) \in \mathbb{R}^2$$

Damit ergibt sich für den Tangentialvektor $\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{t_0^2} \end{pmatrix}$ und für die Tangente:

$$\begin{aligned} Tan_{\gamma(t_0)}(t) &= \gamma(t_0) + t \cdot \gamma'(t_0) \\ &= (t_0, \frac{1}{t_0}) + t \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{t_0^2} \end{pmatrix} \\ &= (t_0 + t, \frac{1}{t_0} - \frac{t}{t_0^2}) \\ &\stackrel{x:=t_0+t}{=} (x, \frac{2}{t_0} - \frac{1}{t_0^2} \cdot x) \end{aligned}$$

Als weiteres Beispiel betrachten wir den Einheitskreis:

$$\gamma_K(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \gamma'_K(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} Tan_{\gamma_K(\varphi)}(t) &= \gamma_K(\varphi) + t \cdot \gamma'_K(\varphi) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir nennen eine parametrisierte Kurve regulär, wenn ihr Tangentialvektor nirgends verschwindet.

Parametertransformationen

Natürlich können wir Kurven, wie beispielsweise den Einheitskreis, auch anders darstellen – mit anderer Geschwindigkeit durchlaufen. Was ändert sich bei sogenannten Umparametrisierungen?

Definition 4. Zwei parametrisierte Kurven $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $\delta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißen äquivalent ($\gamma \sim \delta$), wenn es eine bijektive Abbildung $\tau : J \rightarrow I$ mit $\gamma(\tau(s)) = \delta(s)$ für alle $s \in J$ existiert, wobei τ und τ^{-1} unendlich oft stetig differenzierbar sind.

τ heißt Parametertransformation von γ und δ heißt Umparametrisierung von γ .

Für die Tangente an δ im Punkt $\delta(s)$ gilt:

$$\begin{aligned} Tan_{\delta(s)}\delta &= \delta(s) + \mathbb{R}\delta'(s) \\ &= \gamma(\tau(s)) + \mathbb{R}(\gamma \circ \tau)'(s) \\ &= \gamma(\tau(s)) + \mathbb{R}\tau'(s) \cdot \gamma'(\tau(s)) \\ &= Tan_{\gamma(\tau(s))}\gamma \end{aligned}$$

D.h. der Tangentialvektor kann bei Umparametrisierung zwar seine Länge ändern, die Tangente an die Kurve in einem Punkt bleibt jedoch erhalten.

Da Umparametrisierungen τ bijektiv und in beiden Richtungen unendlich oft stetig differenzierbar sein müssen, folgt insbesondere, dass τ' überall größer Null oder überall kleiner Null sein muss. D.h. jede Parametertransformation ist entweder streng monoton wachsend (orientierungserhaltend) oder streng monoton fallend (orientierungsumkehrend). Und wenn eine Kurve γ regulär ist, ist auch jede Umparametrisierung von γ regulär.

Definition 5. Eine (reguläre) Kurve im $\mathbb{R}^2$ ist eine Äquivalenzklasse von (regulären) parametrisierten Kurven: $\Gamma := [\gamma] = \{\delta : J \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \gamma \sim \delta\}$.

Die Bogenlänge von Kurven

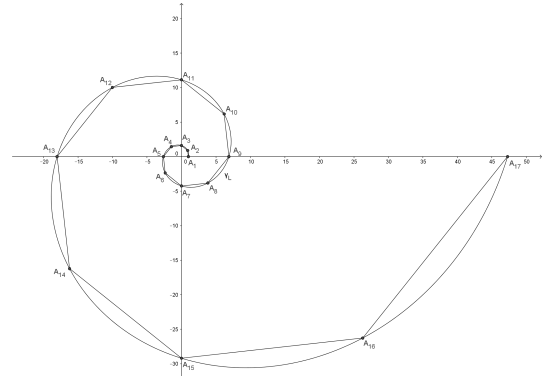
Durch Polygonzüge können wir die Bogenlänge von parametrisierten Kurven $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ approximieren. Die Länge des Polygonzuges bezüglich der Zerlegung $\mathcal{P}$ des Intervalls $[a, b]$ bezeichnen wir mit $\ell_{\mathcal{P}}(\gamma)$.

Wenn wir einen Polygonzug verfeinern, wächst laut Dreiecksungleichung die Länge.

Definition 6. Wir nennen eine parametrisierte Kurve rektifizierbar, wenn die Menge

$$\{\ell_{\mathcal{P}}(\gamma) \mid \mathcal{P} \text{ eine Zerlegung von } [a, b]\}$$

beschränkt ist. In diesem Fall setzen wir die Länge $\ell(\gamma)$ als das Supremum dieser Menge.



Satz 1. Eine zweifach stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist rektifizierbar und es gilt

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Beweis:

Es sei $\mathcal{P}$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Dann gilt mit dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung:

$$\begin{aligned} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| &\stackrel{HS}{=} \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \gamma'(t) dt \right\| && \text{wobei jeweils die Koordinaten} \\ &\leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt. && \text{integriert werden,} \end{aligned}$$

Summation ergibt:

$$\begin{aligned} \ell_{\mathcal{P}}(\gamma) &= \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt. \end{aligned}$$

Da dies für alle Zerlegungen $\mathcal{P}$ von $[a, b]$ gilt, ist das Integral $\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ eine obere Schranke aller Polygonzuglängen $\{\ell_{\mathcal{P}}(\gamma) \mid \mathcal{P} \text{ Zerlegung von } [a, b]\}$ und γ ist rektifizierbar.

Es bleibt zu zeigen, dass $\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ tatsächlich die kleinste obere Schranke – das Supremum – ist.

Dazu setzen wir $s(t) := \ell(\gamma|_{[a,t]})$ für $t \in [a, b]$. Wir zeigen, dass die Ableitung von s gleich der Länge des Tangentialvektors von γ ist. Damit wäre dann die Funktion s stetig differenzierbar und eine Stammfunktion von $\|\gamma'(\cdot)\|$, d.h. $\ell(\gamma) = s(b) - s(a) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$.

Sei also $t \in (a, b)$ und $h \neq 0$ mit $t + h \in [a, b]$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \|\gamma(t+h) - \gamma(t)\| &\leq \ell(\gamma|_{[t, t+h]}) = |s(t+h) - s(t)| \\ &\leq \int_t^{t+h} \|\gamma'(s)\| ds \quad \quad \quad | \cdot \frac{1}{h} \\ \Leftrightarrow \underbrace{\frac{\|\gamma(t+h) - \gamma(t)\|}{h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} \|\gamma'(t)\|} &\leq \frac{|s(t+h) - s(t)|}{h} \leq \underbrace{\frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\gamma'(s)\| ds}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} \|\gamma'(t)\|} \end{aligned}$$

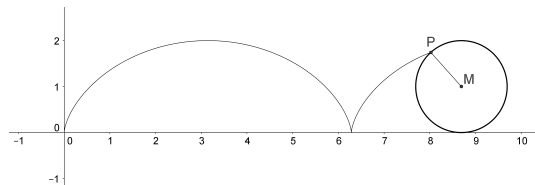
Damit ist $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$ und die Behauptung bewiesen.

□

Zykloiden

Eine gewöhnliche Zykloide entsteht, wenn ein Kreis mit Radius r auf einer Geraden abrollt. Der Punkt, der abgerollt wird, befindet sich zu Beginn am Koordinatenursprung. Befindet sich der Punkt im Inneren des Gangkreises, beschreibt dieser eine verkürzte Zykloide, auch gestreckt oder gestaucht genannt. Eine verlängerte Zykloide dagegen entsteht, wenn sich der Punkt außerhalb des abrollenden Kreises befindet. Außerdem kann der Rollkreis natürlich auch auf anderen Kurven entlangrollen.

Hier beschränken wir uns auf die gewöhnliche Zykloide. Diese werden wir nun parametrisieren.



Wir zerlegen die Bewegung des Punktes in die Bewegung des Mittelpunktes M und der Position des rotierenden Punktes P bezüglich M . Das alles geschieht in Abhängigkeit von dem Winkel φ .

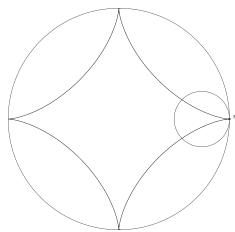
$$\gamma_Z(\varphi) = m(\varphi) + p(\varphi)$$

Die Bewegung von M erfolgt entlang der Parallelen zur Leitgerade mit Abstand r . Der Punkt P verhält sich ähnlich, wie bei der Drehung im Einheitskreis. Allerdings liegt seine Startposition 270° weitergedreht (im positiv mathematischen Drehsinn) und der Winkel bewegt sich entgegengesetzt zu dem am Einheitskreis. Somit:

$$\begin{aligned} \gamma_Z(\varphi) &= r \begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos(270^\circ - \varphi) \\ \cos(270^\circ - \varphi) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix} \\ &\text{mit } \varphi \in [0, 2\pi n], n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Statt den Rollkreis an einer Geraden abzurollen, können wir den Rollkreis mit Radius r z.B. auch innerhalb oder außerhalb eines Leitkreises mit Radius R abrollen. Als Parametrisierung einer sogenannten Hypo- bzw. Epizykloiden erhalten wir:

$$\gamma_{H,E}(\varphi) = \begin{pmatrix} (R \mp r) \cos(\varphi) \pm \cos(\frac{R}{r} \mp 1) \\ (R \mp r) \sin(\varphi) - r \sin(\frac{R}{r} \mp 1) \end{pmatrix}$$



Wählen wir beispielsweise für den Leitkreis den Radius $R = 4r$ und rollen den Rollkreis im Inneren ab, entsteht eine Astroide mit der Parametrisierung:

$$\begin{aligned} P(\varphi) &= m(\varphi) + P_m(\varphi) \\ &= 4r \begin{pmatrix} \cos^3 \varphi \\ \sin^3 \varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Bogenlänge einer Zykloiden

Damit wir die Länge der Rollkurven berechnen können, prüfen wir die gewöhnliche Zykloide auf Regularität. Eine Kurve nennt man dann regulär, wenn ihre erste Ableitung nicht verschwindet. Um die Zykloide auf nicht-reguläre Punkte (sogenannte singuläre Punkte) zu untersuchen, benötigen wir die Ableitung nach φ von $\gamma_Z(\varphi)$:

$$\gamma'_Z(\varphi) = r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ +\sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Wann ist $\gamma'_Z(\varphi) = 0$?

$\gamma'_Z(\varphi)$ verschwindet genau dann, wenn $\cos(\varphi) = 1$ und $\sin(\varphi) = 0$ sind, d.h. bei $\varphi = 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$. In allen anderen Punkten ist die Zykloide regulär.

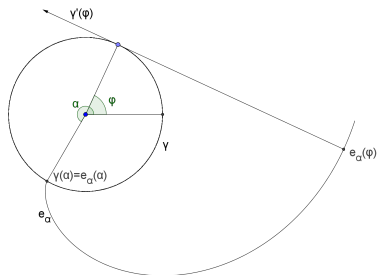
Damit können wir Bogenlängen zwischen zwei Spitzen berechnen und stellen fest, dass die Bogenlänge der Zykloiden zwischen zwei aufeinanderfolgenden Spitzen dem achtfachen Radius des rollenden Kreises entspricht.

$$\begin{aligned} L(\gamma_Z(\varphi)) &= \int_0^a \|\gamma'_Z(\tilde{\varphi})\| d\tilde{\varphi} \\ &= \int_0^a \sqrt{r(1 - \cos(\tilde{\varphi}))^2 + (r \sin(\tilde{\varphi}))^2} d\tilde{\varphi} \\ &= \dots \\ &= 4r(1 - \cos(\frac{a}{2})) \\ &= 8r \sin^2(\frac{a}{2}) \\ &\quad \text{mit } \varphi \in [0, 2\pi], \text{ also } a = 2\pi \\ &= 8r \end{aligned}$$

Evolventen von Kurven

Die Evolvente einer Kurve ist anschaulich gesprochen die Abwicklung der Tangenten an dieser Kurve. Dabei können wir uns die Bewegung zur Erstellung der Evolvente als eine Pendelbewegung eines Fadenpendels mit variabler Länge vorstellen. D.h. wir können Evolventen für die Konstruktion eines tautochronen Pendels verwenden.

Zunächst wollen wir die Konstruktion einer Evolventen anschaulich für den Kreis erklären.



Die Evolvente hängt vom Startpunkt α (Entwicklungspunkt) ab. Die Position $e_\alpha(\varphi)$ setzt sich aus dem Kurvenpunkt $\gamma_K(\varphi)$ und dem Vektor von $\gamma_K(\varphi)$ zum Evolventenpunkt zusammen. Diesen können wir durch den in Länge und Richtung angepassten Tangentialvektor ausdrücken.

$$e_\alpha(\varphi) = \gamma_K(\varphi) - \frac{\ell(\gamma_K|_{[\alpha, \varphi]})}{\|\gamma'_K(\varphi)\|} \gamma'_K(\varphi)$$

Wenn wir dies nun auf unsere Zyklode anwenden, erhalten wir für die Evolvente mit Startpunkt $\gamma_Z(\pi)$:

$$\begin{aligned}
e_\pi(\varphi) &= \gamma_Z(\varphi) - \frac{\ell(\gamma_Z|_{[\pi, \varphi]})}{\|\gamma'_Z(\varphi)\|} \cdot \gamma'_Z(\varphi) \\
&= r \begin{pmatrix} \varphi - \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} - \frac{4r(\cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\varphi}{2})}{\sqrt{(1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi}} \begin{pmatrix} 1 - \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \\
&= \dots \\
&= r \begin{pmatrix} \varphi + \sin(\varphi) \\ 3 + \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\
&= r \begin{pmatrix} (\varphi + \pi) - \sin(\varphi + \pi) \\ 1 - \cos(\varphi + \pi) \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -\pi \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wir erkennen, dass die Evolvente unserer Zyklode wieder eine lediglich verschobene Zyklode ist.

Wenn wir also die Bewegung eines Pendels durch Zykloiden einschränken, wird es auf einer Zykloiden schwingen. Nun wollen wir beweisen, dass ein solches Pendel tatsächlich ein tautochrones Pendel ist.

Definition 7. Eine ebene Kurve, entlang derer sich ein nur von der Schwerkraft beschleunigter bewegter Massepunkt unabhängig vom Ausgangspunkt stets dieselbe Zeit benötigt, um zum tiefsten Punkt zu gelangen, heißt tautochron.

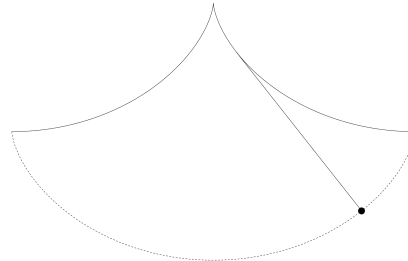
Die Tautochroneneigenschaft der Zykloiden

Satz 2. Der Zykloidenbogen ist eine Tautochrone.

Beweis:

Ein nach oben geöffneter Zykloidenbogen, bei dem der Rollkreis den Radius r hat, kann wie folgt nach dem abgerollten Winkel φ parametrisiert werden:

$$\gamma_Z(\varphi) = r(\varphi - \sin \varphi, 1 + \cos \varphi).$$



Unser Massepunkt m soll zur Zeit $t = 0$ im Punkt $\gamma_Z(\varphi_0)$ starten, wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\varphi_0 \in [0, \pi]$ sei.

$\gamma_Z(\varphi)$ sei die Position des Massepunktes zur Zeit t . Dabei betrachten wir jedoch nur Winkel $\varphi \in [\varphi_0, \pi]$, weil dies für die späteren Überlegungen ausreichend ist.

Laut Energieerhaltungssatz gilt:

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{kinetische Energie}} - \underbrace{mg(y(\varphi_0) - y(\varphi))}_{\Delta \text{ potentielle Energie}} \stackrel{!}{=} 0.$$

Damit erhalten wir für die Geschwindigkeit, die der Massepunkt an der Stelle $\gamma_Z(\varphi)$ hat:

$$v = \sqrt{2g(y(\varphi_0) - y(\varphi))}.$$

Wenn s der zurückgelegte Weg ist, gilt $v = \frac{ds}{dt}$, und wir erhalten durch Trennung der Variablen:

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2g(y(\varphi_0) - y(\varphi))}} ds.$$

Damit wir integrieren können, müssen wir ds substituieren. Dazu nutzen wir die Bogenlänge s in Abhängigkeit vom Winkel φ .

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{d\varphi}(\varphi) &= \|\gamma'_Z(\varphi)\| \\
&= r\sqrt{(1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} \\
&= r\sqrt{2 - 2\cos \varphi} \\
&= r\sqrt{2 - 2(\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2})} \\
&= r\sqrt{4\sin^2 \frac{\varphi}{2}} \\
&= 2r\sin \frac{\varphi}{2} \quad \varphi \in [\varphi_0, \pi] \implies \sin \frac{\varphi}{2} \geq 0
\end{aligned}$$

Wir erhalten $ds = 2r\sin \frac{\varphi}{2} d\varphi \quad \varphi \in [\varphi_0, \pi]$.

Nun können wir integrieren. Dabei wählen wir als Integrationsgrenzen unsere Startauslenkung und die Auslenkung im tiefsten Punkt. Für die Integration nach der Zeit ergibt dies also die Zeitpunkte $T_0 = 0$ und ein Viertel der Schwingungsdauer T_{φ_0} .

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}T_{\varphi_0} &= \int_0^{\frac{1}{4}T_{\varphi_0}} dt \\
&= \int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{2r\sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2g(y(\varphi_0) - y(\varphi))}} d\varphi \\
&= \sqrt{\frac{2}{g}} r \int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{(y(\varphi_0) - y(\varphi))}} d\varphi
\end{aligned}$$

Wir setzen die y -Koordinaten der Kurvenpunkte ein.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}T_{\varphi_0} &= \sqrt{\frac{2}{g}} r \int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{r(1 + \cos \varphi_0 - 1 - \cos \varphi)}} d\varphi \\
&\quad 1 + \cos \varphi = 1 + \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 2\cos^2 \frac{\varphi}{2} \\
&= \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\varphi_0}{2} - \cos^2 \frac{\varphi}{2}}} d\varphi
\end{aligned}$$

Wir substituieren $z := \cos \frac{\varphi}{2}$, $z_0 = \cos \frac{\varphi_0}{2}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}T_{\varphi_0} &= \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{z_0}^0 \frac{-2}{\sqrt{z_0^2 - z^2}} dz \\
&= 2\sqrt{\frac{r}{g}} \int_0^{z_0} \frac{1}{\sqrt{z_0^2 - z^2}} dz
\end{aligned}$$

Erneute Substitution mit $u := \frac{z}{z_0}$ ergibt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}T_{\varphi_0} &= 2\sqrt{\frac{r}{g}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} dz \\
&= 2\sqrt{\frac{r}{g}} \left[\arcsin u \right]_0^1 \\
&= \pi\sqrt{\frac{r}{g}}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten für die Schwingungsdauer $T_{\varphi_0} = 4\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$. Insbesondere hängt die Schwingungsdauer also nicht von der Startauslenkung des Pendels ab.

□