Wie können wir hohe Dimensionen fühlen?

Teilnehmer:

Amin Chaoui	Herder-Gymnasium
Ben Chowdhury	Andreas-Gymnasium
Leon Feyer	Heinrich-Hertz-Gymnasium
Nicolas Kirschner	Immanuel-Kant-Gymnasium
Daniel Klodt	Heinrich-Hertz-Gymnasium
Marten Kremser	Herder-Gymnasium
Jan Pocher	Immanuel-Kant-Gymnasium
Linus Schöniger	Herder-Gymnasium
Julius Lyonel Wachlin	Herder-Gymnasium

Gruppenleiter:

Maryna Viazovska, Humboldt-Universität zu Berlin
Carolin Christiansen, Humboldt-Universität zu Berlin

Das Ziel dieses Projektes ist es, hohe Dimensionen zu erforschen. Wir können geometrische Objekte in den Dimensionen eins, zwei und drei leicht verstehen und veranschaulichen, da wir solchen Objekten im Alltag ständig begegnen und mit ihnen arbeiten. Alle anderen Dimensionen existieren nur als eine mathematische Abstraktion. Trotzdem spielt das Studium der höheren Dimensionen eine wichtige Rolle, beispielsweise bei der Signalverarbeitung, Kryptographie und Teilchenphysik. Die Darstellung jener höheren Dimensionen und die darin enthaltenen Körper ist eine äußerst komplizierte Angelegenheit. Daher haben wir in dieser Woche verschiedene Arten von graphischen Darstellungen, Modellen und Farben verwendet, um die abstrakten Körper in den hohen Dimensionen zu verstehen und ihre Eigenschaften zu erforschen und zu beschreiben. Dabei wurden verschiedene Darstellungsmethoden genutzt, welche im Folgenden ausführlich erläutert und erklärt werden.

Euklidischer Raum

Definition 1. Eine *reeller Vektorraum* ist eine algebraische Struktur [V; + ; ·], wobei V eine nichtleere Menge mit den Elementen $\vec{a}, \vec{b}, ...$ (diese Elemente werden Vektoren genannt) ist, + eine Verknüpfung von $V \times V$ in V ist (Vektoraddition genannt) und · eine Verknüpfung von $R \times V$ in V ist (skalare Multiplikation genannt), wobei folgende Eigenschaften gelten:

- V1 Assoziativgesetz: $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ für alle $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$
- V2 Existenz eines neutralen Elements $\vec{0} \in V$, sodass $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ für jedes $\vec{x} \in V$
- V3 Existenz inverser Elemente:
  Für jedes $\vec{x} \in V$ existiert ein inverses Element $-\vec{x} \in V$, für das gilt: $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$.
- V4 Kommutativgesetz: Für alle $\vec{x}$,$\vec{y} \in V$ gilt: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$.
- S1 Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für alle $\vec{x}$,$\vec{y} \in V$ gilt: $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$
- S2 Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\vec{x} \in V$ gilt: $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$
- S3 Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\vec{x} \in V$ gilt: $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\,\beta)\,\vec{x}$
- S4 Für alle $\vec{x} \in V$ gilt: $1\,\vec{x} = \vec{x}$.

Die Struktur [V; +] mit den Axiomen V1, V2, V3 bildet eine Gruppe.

Definition 2. Ein Euklidischer Vektorraum ist ein reeller Vektorraum, auf dem ein *Skalarprodukt* definiert ist. Das Skalarprodukt $\vec{x} \cdot \vec{y}$ ist eine Verknüpfung, die den Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ aus V eine reelle Zahl zuordnet. Das Skalarprodukt erfüllt die folgenden Axiome: Für alle $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

- P1 $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$
- P2 $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$
- P3 $(\alpha\vec{x}) \cdot (\beta\vec{y}) = \alpha\beta\,(\vec{x} \cdot \vec{y})$
- P4 $\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0$
- P5 $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0$ dann und nur dann, wenn $\vec{x} = \vec{0}$.

Der n-dimensionale reelle Koordinatenraum $\mathbb{R}^n$ ist die Menge der n-Tupel $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, wobei die x_i reelle Zahlen sind.

Als Vektoren werden sie komponentenweise addiert und mit reellen Zahlen multipliziert:

$$\begin{aligned} &\vec{x} + \vec{y} = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ &\alpha\,\vec{x} = \alpha\,(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha\, x_1, \ldots, \alpha\, x_n) \end{aligned}$$

Das Skalarprodukt ist definiert durch

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) = x_1\, y_1 + \ldots + x_n\, y_n.$$

Mit diesem Skalarprodukt ist der $\mathbb{R}^n$ ein Euklidischer Vektorraum.

Die Länge eines Vektors $\vec{x}$ wird folgendermaßen definiert:

$$||\vec{x}|| := \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Die Länge des Differenzvektors $\vec{x}$ - $\vec{y}$ ist folgendermaßen definiert:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = ||\vec{x} - \vec{y}|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Untergruppen und Gitter

Definition 3. G ist eine *Untergruppe* von V, wenn gilt: $G \subset V$, $\vec{0} \in G$ und für alle $\vec{x}, \vec{y} \in G$ die Elemente $-\vec{x}$ und $\vec{x} + \vec{y}$ auch die Elemente von G sind.

Ein Beispiel einer Untergruppe von $\mathbb{R}^n$ ist die Menge $\mathbb{Z}^n$, die aus Vektoren mit auschließlich ganzzahligen Koordinaten besteht.

Definition 4. Ein Gitter im Euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ ist eine *Untergruppe* von $\mathbb{R}^n$, die isomorph zu $\mathbb{Z}^n$ ist und den reellen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ erzeugt.

Nun betrachten wir einige Beispiele. $\mathbb{Z}^n$ ist selbst ein Gitter in $\mathbb{R}^n$.
Ein E_8-*Gitter* in $\mathbb{R}^8$ ist definiert durch

$$\Lambda_8 = \{(x_1, \ldots, x_8) | (x_1, \ldots x_8 \in \mathbb{Z} \text{ oder } x_1, \ldots, x_8 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}\ ) \text{ und } x_1 + \cdots + x_8 \in 2\mathbb{Z}\}.$$

Ist Λ_8 eine Untergruppe in $\mathbb{R}^8$?
Wir müssen überprüfen, ob die Summe zweier beliebiger Elemente aus Λ_8 wieder ein Element von Λ_8 ist. Die Summe der Koordinaten eines jeden Elements von Λ_8 ist gerade. Damit ist auch die Summe der Koordinaten von zwei Elementen von Λ_8 gerade. Nun betrachten wir die einzelnen Koordinaten. Aufgrund der Definition von Untergruppen müssen bei der Betrachtung von Λ_8 3 Fälle unterschieden werden:

- Alle Koordinaten sind ganze Zahlen, so ist auch die Summe eine ganze Zahl.
- Alle Koordinaten sind ganze Zahlen + $\frac{1}{2}$, so ist die Summe auch eine ganze Zahl.
- Die Koordinaten sind gemischt halb oder ganz, so kann die Summe eine ganze oder halbe Zahl sein.

Λ_8 muss eine Untergruppe sein, da alle Vektoren mit ganzen sowie die halben Zahlen als Koordinaten Elemente des Gitters sind.

Nun zeigen wir: Sei $\vec{x} \in \Lambda_8$ und $\vec{x} \neq \vec{0}$. Dann $||\vec{x}|| \geq \sqrt{2}$.

Es gilt: $||\vec{x}|| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_8^2}$.

1.Fall $x_1, ..., x_8 \in Z$

Aus $\vec{x} \neq \vec{0}$ folgt, dass mindestens ein $x_i \neq 0$ ist. Um das Minimum von $||\vec{x}||$ zu finden, müssen alle x_i minimal sein. Dies wäre der Fall, wenn alle $x_i = 0$ sind, was nach obiger Aussage nicht funktionieren würde.
Durch die Voraussetzung $x_1 + ... + x_8 \in 2Z$ muss die Summe $x_1^2 + ... + x_8^2$ mindestens 2 sein und damit $\sqrt{x_1^2 + ... + x_8^2} = ||\vec{x}|| \geq \sqrt{2}$.

2.Fall $x_1, ..., x_8 \in \frac{1}{2} + Z$

Für das Minimum können alle $|x_i|$ höchstens $\frac{1}{2}$ sein, weshalb gilt:

$x_1^2 + ... + x_8^2 \geq (\frac{1}{2})^2 \cdot 8$ und damit $\sqrt{x_1^2 + ... + x_8^2} = ||\vec{x}|| \geq \sqrt{2}$.

Da Λ_8 eine Untergruppe ist, gilt für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \Lambda_8$, dass auch$\vec{x} \neq \vec{y} \in \Lambda_8$. Damit gilt $||\vec{x} - \vec{y}|| \geq \sqrt{2}$.

Mithilfe dieser Voraussetzungen können wir jetzt die Anzahl der Vektoren $\vec{x} \in \Lambda_8$ bestimmen, sodass $||\vec{x}|| = \sqrt{2}$. Da wir einen 8-Dimensionalen Raum betrachten, können wir die Gleichung auch so darstellen.

$$\sqrt{x_1^2 + ... + x_8^2} = \sqrt{2}$$

Es gibt mehrere Einsetzungsmöglichkeiten, welche die Gleichung erfüllen. Zum einen kann man für zwei der acht Koordinaten 1 einsetzten, wobei es aufgrund von Vorzeichen Variation insgesamt $4 \cdot \binom{8}{2} = 112$ Kombinationen gibt. Zum anderen können auch alle Koordinaten den Betrag $\frac{1}{2}$ besitzen um die Gleichung zu erfüllen. Auch hier sind Vorzeichenvariationen vorhanden. Damit, wie oben genannt, die Summe aller Koordinaten eine ganze Zahl bildet können hier jedoch immer nur eine gerade Anzahl an Koordinaten positiv und negativ sein. Wir erhalten dadurch 128 weitere Möglichkeiten.

So haben wir insgesamt 240 Vektoren in $\mathbb{R}^8$, die die Bedingung $||\vec{x}|| = \sqrt{2}$ erfüllen.

Definition 5. Die n-te Kusszahl ist die maximale Anzahl an n-dimensionalen Einheitskugeln, also Kugeln mit Radius 1, die gleichzeitig eine weitere solche Einheitskugel im Euklidischen Raum berühren können, ohne dass Überschneidungen auftreten.

Kusszahl(2) = 6, Kusszahl(3) = 12, Kusszahl(8) = 240

Polytope

Ein Polytop ist in der Geometrie eine verallgemeinernde Bezeichnung für Polygone in einer beliebigen Dimension. Eine besondere Bedeutung in der Mathematik und der linearen Optimierung haben konvexe Polytope, also Polytope, bei denen die Verbindungsstrecke zwischen zwei beliebigen Punkten des Polytops wiederum komplett im Polytop enthalten ist. Sie sind als die konvexe Hülle endlich vieler Punkte (Eckpunkte) definiert. Ein n-dimensionales Polytop wird durch eine Anzahl von $(n-1)$ -dimensionalen *Facetten* begrenzt. Diese Facetten sind auch Polytope, deren Facetten $(n-2)$-dimensionalen Seiten des ursprünglichen Polytops sind.

Definition 6. Eine *Fahne* ist eine Folge von Seiten eines Polytops, wobei die erste Seite die Dimension null hat und jede darauffolgende Seite eine um jeweils eins höhere Dimension besitzt, bis zur Dimension $(n-1)$.

Definition 7. Ein *reguläres Polytop* ist ein Polytop, dessen Fahnen alle zueinander symmetrisch sind.

Ein reguläres Polytop kann durch ein *Schläfli Symbol* dargestellt werden. Wir erklären die Notation durch die Dimension, die wir bei jeder Stufe um 1 erhöhen.

- [dim = 2:] Ein konvexes reguläres Polygon mit n Seiten ist durch $\{n\}$ bezeichnet.
- [dim = 3:] Ein reguläres Polyeder mit Seiten $\{n\}$ und mit p Seiten, die in einer Ecke verbunden sind wird, durch $\{n, p\}$ bezeichnet.
- [dim = 4:] Ein reguläres 4-Polytop mit 3-Seiten $\{n, p\}$ mit q 3-dimensionalen Seiten an einer Ecke wird durch $\{n, p, q\}$ bezeichnet.
- [dim = 5:] Ein reguläres 5-Polytop wird durch $\{n, p, q, r\}$ bezeichnet...

Nun betrachten wir reguläre Polytope in verschiedenen Dimensionen.

Platonische Körper

Reguläre Polytope in Dimension 3 werden *Platonische Körper* gennant.

Satz 1. *Die einzigen Platonischen Körper sind Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder, d.h. es gibt genau 5 Platonische Körper.*

Voraussetzungen:

Für jede Ecke eines Polyeders muss die Summe der Innenwinkel der angrenzenden Flächen kleiner als 360° sein. Wäre die Innenwinkelsumme 360°, dann würden sich die Flächen auf einer Ebene befinden und somit keine Ecke bilden.
Des Weiteren müssen an jeder Ecke mindestens 3 Seiten anliegen, um einen 3-dimensionalen Körper zu bilden.

Polygon	Innenwinkel	3	4	5	6	7 oder mehr
Dreieck	60°	180°	240°	300°	360°	>360°
Viereck	90°	270°	360°	>360°	>360°	>360°
Fünfeck	108°	324°	>360°	>360°	>360°	>360°
Sechseck	120°	360°	>360°	>360°	>360°	>360°
Sieben- oder mehr Eck	>128,57... °	>360°	>360°	>360°	>360°	>360°

Wie in der Tabelle ersichtlich gibt es geometrisch betrachtet nur fünf Möglichkeiten für verschiedene Platonische Körper: Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder. Rechnerisch lässt sich das mithilfe des Eulerschen Polyedersatzes beweisen. Dieser besagt, dass die Anzahl der Ecken plus die Anzahl der Flächen minus die Anzahl der Kanten gleich zwei sein muss. (Sei $P \subset \mathbb{R}^3$ ein konvexes Polytop. Dann gilt $\#Ecken(P) - \#Kanten(P) + \#Seiten(P) = 2$.) Dieser Satz gilt für alle beschränkten Polyeder. Aus diesem Satz lässt sich herleiten, dass es nicht mehr als fünf Platonische Körper gibt.

Sei P ein reguläres Polytop. Jede Seite von P ist ein p-Eck und in jeder Ecke von P treffen sich genau q Seiten. Sei N die Anzahl (#) der Ecken von P.

Es gelten die folgenden Beziehungen zwischen den Ecken-, Kanten- und Seitenanzahlen: $\#Ecken = N$, $\#Seiten \cdot p = \#Ecken \cdot q$ und $\#Kanten \cdot 2 = \#Ecken \cdot q$. Damit erhalten wir $\#Seiten = \frac{q}{p} \cdot N$ und $\#Kanten = \frac{q}{2} \cdot N$.

Einsetzen in die Eulersche Polyederformel liefert $N - \frac{q}{2} \cdot N + \frac{q}{p} \cdot N = 2$. Das ist äquivalent zu $N(1 - \frac{q}{2} + \frac{q}{p}) = 2$ mit $N, p, q \in \mathbb{N}$.

Für Platonische Körper folgt also:

Polyeder	E	F	K	E + F - K
Tetraeder	4	4	6	2
Hexaeder	8	6	12	2
Oktaeder	6	8	12	2
Dodekaeder	20	12	30	2
Ikosaeder	12	20	30	2

Reguläre Polytopen in $\mathbb{R}^n$

In jeder Dimension existieren die folgenden drei Typen von regulären Polytopen.

- Das einfachste Polytop ist das *Simplex*.

  $$\Delta_n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) | x_1 \geq 0, \dots, x_{n+1} \geq 0, x_1 + \cdots + x_{n+1} = 1\}.$$

  Das Simplex Δ_n besitzt n+1 Ecken und n+1 $(n-1)$-dimensionale Seiten.

- Ein *(Hyper)Würfel* $W_n \subset \mathbb{R}^n$ ist definiert als

  $$W_n = \{(x_1, \dots, x_n) | -1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_n \leq 1\}.$$

  Er besitzt 2^n Ecken und 2n $(n-1)$-dimensionale Seiten.

- Ein n-dimensionales *Kreuzpolytop* ist die konvexe Hülle der $2n$ Ecken $\pm\vec{e}_1, \dots, \pm\vec{e}_n$, wobei wir mit $\vec{e_i} = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ den i-ten Einheitsvektor des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ bezeichnen.

In fünf und mehr Dimensionen gibt es genau drei reguläre Polytope: Simplex , Würfel und Kreuzpolytop.

Reguläre Polytope in dim 4

Der Schweizer Mathematiker Schläfli zeigte, dass es sechs reguläre konvexe Polytope in vier Dimensionen gibt. Diese Polytope sind: 4-Simplex, 4-Kreuzpolytop, 4-Würfel und auch 24-Zeller, 120-Zeller und 600-Zeller.

120-cell $\{5,3,3\}$
3-dim Seiten sind $\{5,3\}$-Dodecaeder
600 Ecken

600-cell $\{3,3,5\}$
3-dim Seiten sind $\{3,3\}$-Tetraeder
120 Ecken

24-cell $\{3,4,3\}$
3-dim Seiten sind $\{3,4\}$-Octaeder
96 Ecken

4-simplex $\{3,3,3\}$
4-Würfel $\{4,3,3\}$
4-Crosspolytop $\{3,3,4\}$

Schlegel-Diagramme

Eine sehr nützliche Methode, ein konvexes Polyeder zu repräsentieren, ist durch Projektion auf eine Ebene. Wenn es von einem äußeren Punkt auf eine Fläche projiziert wird, wird es durch eine polygonale Fläche dargestellt, die zweimal in Polygone unterteilt wird, da jeder Strahl zweimal schneidet. Es ist immer möglich, durch geeignete Wahl des Projektionszentrums, eine Projektion von einer Seite zu machen, die alle Vorsprünge anderer Seiten vollständig enthält. Diese wird *Schlegel-Diagramm* des Polyeders genannt.

Definition 8. Ein *Schlegel-Diagramm* ist eine Projektion eines Polytops aus $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^{n-k}$ durch einen Punkt über eine seiner Facetten. Die resultierende Einheit ist eine polytopishe Unterteilung der Facette in $\mathbb{R}^{n-k}$, der kombinatorisch äquivalent zu dem ursprünglichen Polytop ist.

Beispiele für Schlegeldiagramme

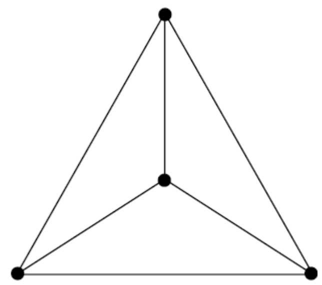

Abbildung 4: Schlegeldiagramm eines Tetraeders

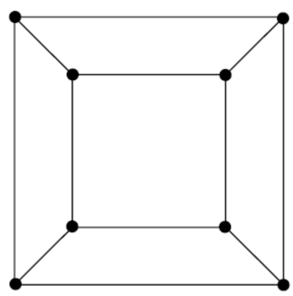

Abbildung 5: Schlegeldiagramm eines Hexaeders

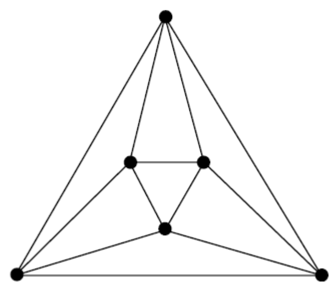

Abbildung 6: Schlegeldiagramm eines Oktaeders

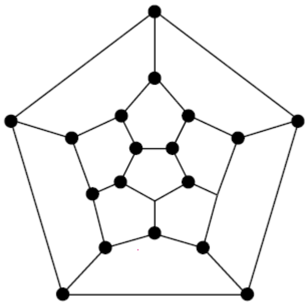

Abbildung 7: Schlegeldiagramm eines Dodekaeders

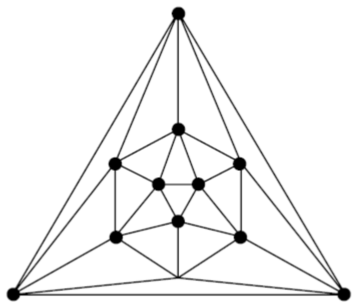

Abbildung 8: Schlegeldiagramm eines Ikosaeders

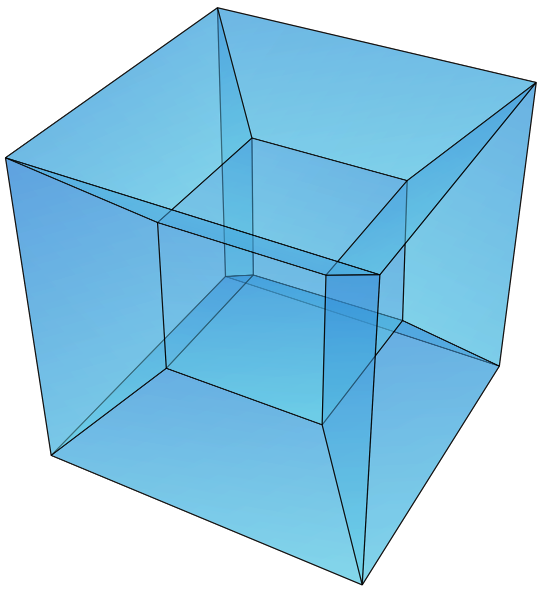

Abbildung 9: Schlegeldiagramm eines 4-dimensionalen Würfels

Orthogonale Projektion

Sei V ein Euklidischer Raum und $U \subset V$ ein Unterraum.
$U^\perp = \{\vec{a} \in V | \textit{ für jedes } \vec{u} \in U \textit{ ist } \vec{a} \cdot \vec{u} = 0\}$

Satz 2. *Sei $\vec{a} \in V$. Dann $\exists!\ \vec{b} \in U$ und $\vec{c} \in U^\perp$, sodass gilt $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.*

Satz 3. *Sei $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n}$ eine orthonormale Basis von V und $\vec{a} \in V$. Dann ist:*

$$\vec{a} = (a_1 \cdot \vec{v_1}) \cdot \vec{v_1} + \cdots + (a_n \cdot \vec{v_n}) \cdot \vec{v_n}.$$

Beispiel 1. Sei $V = \mathbb{R}^n$. Dann bilden die Vektoren $\vec{v_1} = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, \vec{v_n} = (0, \ldots, 0, 1)$ eine orthonormale Basis von V.

$$\begin{aligned} (a_1, \ldots, a_n) &= a_1 \cdot (1, 0, \ldots, 0) + a_2 \cdot (0, 1, 0, \ldots, 0) + \cdots + a_n \cdot (0, \ldots, 0, 1) \\ &= (a_1, 0, \ldots, 0) + (0, a_2, 0, \ldots, 0) + \cdots + (0, \ldots, 0, a_n) \end{aligned}$$

Sei $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_k}$ eine Orthonormalbasis von $U, w_1, \ldots, w_{n-k}$ eine Orthonormalbasis von V. Dann ist:

$$\vec{a} = (a \cdot \vec{u_1}) \cdot \vec{u_1} + \cdots + (a \cdot \vec{u_k}) \cdot \vec{u_k} + (a \cdot \vec{w_1}) \cdot \vec{w_1} + \cdots + (a \cdot \vec{w_{n-k}}) \cdot \vec{w_{n-k}}.$$

Sei $V = \mathbb{R}^3$, der dreidimensionale reelle Standardvektorraum. Sei $U = \{(0, 0, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Dann ist $U^\perp = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

Für einen Vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ist dann die orthogonale Projektion des Vektors auf den Unterraum U gegeben durch $P_U(\vec{a}) = (0, 0, a_3)$. Allgemein schreiben wir:

$$P_U(\vec{a}) = (\vec{a} \cdot \vec{u_1}) \cdot \vec{u_1} + (\vec{a} \cdot \vec{u_2}) \cdot \vec{u_2} + \cdots + (\vec{a} \cdot \vec{u_n}) \cdot \vec{u_n}.$$

Abschließend zeichnen wir eine Projektion eines Würfels. Sei $W_3 \subset \mathbb{R}^3$ ein Würfel. Die Projektionsebene sei $U = \{a_1\vec{u_1} + a_2\vec{u_2} | a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$.

Sei $\vec{u_1} = (1, 0, 0), \vec{u_2} = (0, 1, 0)$. Es ist $W_3 = \{(\pm 1, \pm 1, \pm 1)\}$ und damit

$$\begin{aligned} P_U(W_3) &= ((\pm 1, \pm 1, \pm 1) \cdot (1, 0, 0)) \cdot (1, 0, 0) + ((\pm 1, \pm 1, \pm 1) \cdot (0, 1, 0)) \cdot (0, 1, 0) \\ &= \{(1, 1, 0), (1, -1, 0), (-1, 1, 0), (-1, -1, 0)\}. \end{aligned}$$

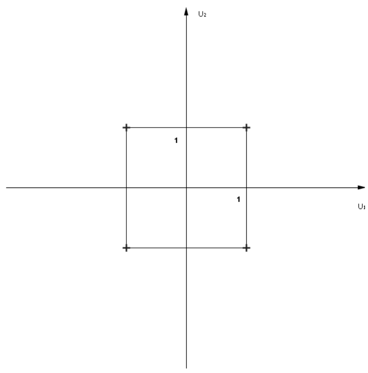

Abbildung 10: Orthogonalprojektion eines Würfels