

Wir steuern einen Mini-Roboter!

Teilnehmer:

Marek Bartusch
Cecilia Lange
Yannick Lehmann
Johannes-Lucas Löwe
Nicolas Menzel
Huong Thao Pham
Florian Pogatzki
Anne Reulke
Jonas Wanke
Marian Zuska

Heinrich-Hertz-Gymnasium
Heinrich-Hertz-Gymnasium
Käthe-Kollwitz-Gymnasium
Heinrich-Hertz-Gymnasium
Käthe-Kollwitz-Gymnasium
Heinrich-Hertz-Gymnasium
Heinrich-Hertz-Gymnasium
Heinrich-Hertz-Gymnasium
Heinrich-Hertz-Gymnasium
Heinrich-Hertz-Gymnasium

mit tatkräftiger Unterstützung durch:

Laura-Corinna Reeder

Humboldt-Universität zu Berlin

Gruppenleiter:

Caren Tischendorf

Humboldt-Universität zu Berlin, MATHEON



1. Problemstellung

Ein Roboter soll einen Parcours mit Hindernissen selbstständig durchfahren. Dazu sollen mögliche Fahrwege des Roboters gefunden und hinsichtlich der benötigten Zeit getestet werden.

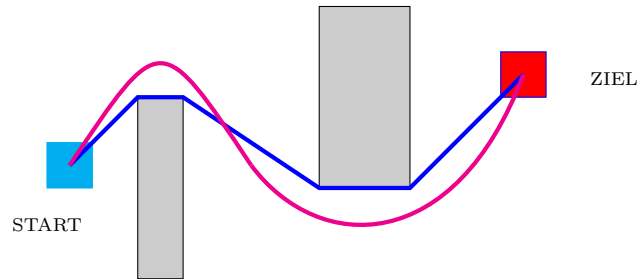


Abbildung 1: **Blau:** Kürzeste Verbindungsstrecke zwischen Start und Ziel um die Hindernisse herum; **Magenta:** Möglicher Fahrweg des Roboters

2. Grundlagen

2.1. Parametrische Darstellung von Geraden

Koordinatendarstellung zweier Punkte in der Ebene in Spaltenform:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Darstellung der Punkte x auf der Geraden durch a und b :

$$x = (1 - \lambda)a + \lambda b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - \lambda)a_1 + \lambda b_1 \\ (1 - \lambda)a_2 + \lambda b_2 \end{pmatrix}$$

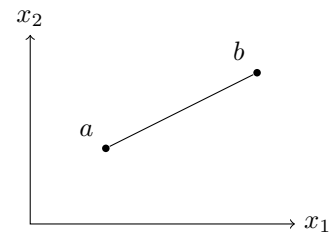


Abbildung 2: Lineare Interpolation zwischen a und b mit $\lambda \in [0, 1]$

$$x = \underbrace{(1 - \lambda)}_{=: \alpha} a + \underbrace{\lambda}_{=: \beta} b = \alpha a + \beta b \quad \text{mit } \alpha + \beta = 1$$

Definition 1. (α, β) heißen die baryzentrischen Koordinaten von x bezüglich der Punkte a und b in der Ebene.

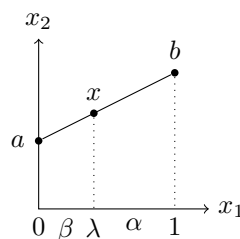


Abbildung 3: Baryzentrische Koordinaten eines Punktes x bezüglich der Punkte a und b

Für die Längen $|\vec{ax}|$ und $|\vec{xb}|$ gilt:

$$\frac{|\vec{ax}|}{|\vec{xb}|} = \frac{\beta}{\alpha}$$

Definition 2. Sei c ein Punkt auf der Geraden durch die Punkte a und b in der Ebene. Dann sei das Teilverhältnis definiert durch:

$$TV(a, c, b) := \underbrace{\frac{\beta}{\alpha}}_{\substack{\text{baryzentrische} \\ \text{Koordinaten}}} = \frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

2.2. Satz von Menelaos

Satz 1. Seien p_1, p_2, p_3 drei verschiedene Punkte in der Ebene und $t \neq s$ reelle Zahlen. Sei weiter

$$\begin{aligned} a_t &= (1-t)p_1 + tp_2, & b_t &= (1-t)p_2 + tp_3, \\ a_s &= (1-s)p_1 + sp_2, & b_s &= (1-s)p_2 + sp_3. \end{aligned}$$

Dann gilt für den Schnittpunkt c der Geraden durch a_t und b_t mit der Geraden durch a_s und b_s :

$$TV(a_t, c, b_t) = \frac{s}{1-s} \quad \text{und} \quad TV(a_s, c, b_s) = \frac{t}{1-t}.$$

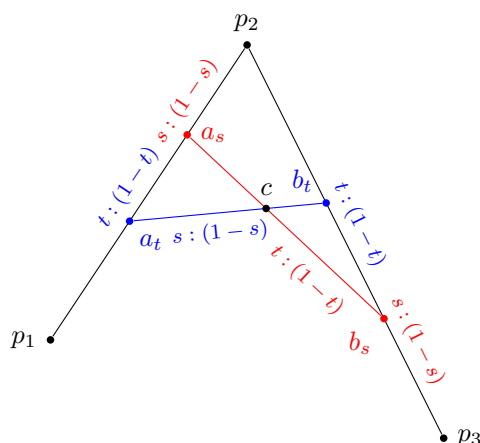


Abbildung 4: Visualisierung des Satzes von Menelaos

Beweis. Es ist zu zeigen, dass

$$c = (1-t)a_s + tb_s \quad \text{und} \quad c = (1-s)a_t + sb_t \text{ gilt.}$$

Wir zeigen

$$(1-t)a_s + tb_s = (1-s)a_t + sb_t.$$

Dann liegt $c := (1-t)a_s + tb_s = (1-s)a_t + sb_t$ sowohl auf der Geraden durch a_t und b_t als auch auf der Geraden durch a_s und b_s , d.h. c ist Schnittpunkt der beiden Geraden.

Durch Einsetzen der Definition der Punkte a_t, b_t, a_s und b_s folgt:

$$\begin{aligned} (1-t)a_s + tb_s &= (1-s)a_t + sb_t \\ \Leftrightarrow \underline{(1-t)(1-s)p_1} + \underline{(1-t)sp_2} + \underline{t(1-s)p_2} + \underline{tsp_3} &= \underline{(1-s)(1-t)p_1} + \underline{(1-s)tp_2} + \underline{s(1-t)p_2} + \underline{stp_3} \end{aligned}$$

□

3. Bézierkurven

3.1. Definition

Definition 3. Seien b_0, b_1, \dots, b_n in der Ebene. Dann ist $B[b_0, \dots, b_n]$ eine Bézierkurve zu den Kontrollpunkten b_0, \dots, b_n , falls die Punkte auf $B[b_0, \dots, b_n]$ wie folgt definiert sind: $B[b_0, \dots, b_n](t) := b_0^{[n]}(t)$ mit $t \in \mathbb{R}$ und

$$\begin{aligned} \forall i = 0, \dots, n \quad \forall t \in \mathbb{R} : \quad & b_i^{[0]}(t) = b_i, \\ \forall r = 1, \dots, n \quad \forall i = 0, \dots, n-r \quad \forall t \in \mathbb{R} : \quad & b_i^{[r]}(t) = (1-t)b_i^{[r-1]}(t) + tb_{i+1}^{[r-1]}(t). \end{aligned}$$

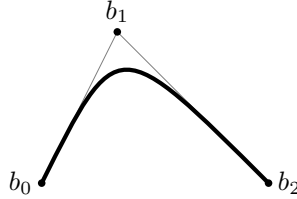


Abbildung 5: Eine einfache Bézierkurve für $n = 2$ und $t \in [0, 1]$.

Bézierkurven haben eine Reihe nützlicher Eigenschaften. Für die Beschreibung von möglichen Wegen für den Roboter sind die beiden wichtigsten Eigenschaften die konvexe Hülleneigenschaft und die Differenzierbarkeit. Zum Nachweis dieser Eigenschaften benutzen wir eine Darstellung der Bézierkurven mit Hilfe von Bernstein-Polynomen.

3.2. Bernstein-Polynome

Definition 4. Für $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \{0, \dots, n\}$ sind die Bernstein-Polynome definiert als

$$B_i^{[n]}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}.$$

Lemma 1. Für $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \{0, \dots, n\}$ gilt:

$$B_i^{[n]}(t) = (1-t)B_1^{[n-1]}(t) + tB_{i-1}^{[n-1]}(t)$$

mit $B_0^{[0]}(t) := 1$ und $B_j^{[n]}(t) := 0 \quad \forall j \notin \{0, \dots, n\}$.

Beweis.

$$\begin{aligned} B_i^{[n]}(t) &= \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \\ &= (1-t) \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-1-i} \\ &= (1-t) \frac{n}{n-i} \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-1-i} \\ &= (1-t) B_i^{[n-1]}(t) - \underbrace{\left(1 - \frac{n}{n-i}\right)}_{\frac{-i}{n-i}} (1-t) \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-1-i} \end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\frac{i}{n-i} \binom{n-1}{i} = \frac{i}{n-i} \frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!} = \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} = \binom{n-1}{i-1}$$

Die Nebenrechnung können wir oben einsetzen und erhalten

$$\begin{aligned} B_i^{[n]}(t) &= (1-t)B_i^{[n-1]}(t) + \binom{n-1}{i-1} t^i (1-t)^{n-i} \\ &= (1-t)B_i^{[n-1]}(t) + tB_{i-1}^{[n-1]}(t). \end{aligned}$$

□

Lemma 2. Für $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \{0, \dots, n\}$ gilt:

$$\sum_{i=0}^n B_i^{[n]}(t) = 1.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n B_i^{[n]}(t) &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \underbrace{t^i}_a \underbrace{(1-t)^{n-i}}_b = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i} \\ &= (a+b)^n \quad (\text{Binomischer Satz}) \\ &= (t + (1-t))^n \\ &= 1^n = 1 \end{aligned}$$

□

Satz 2. Binomischer Satz

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

Beweis. per Induktion über n

$$\begin{array}{ll} \text{Induktionsanfang: } n=0 & \text{linke Seite: } (a+b)^0 = 1 \quad \text{rechte Seite: } \sum_{i=0}^0 \binom{0}{i} a^i b^{-i} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1 \\ \text{Induktionsschritt: „} n \rightarrow n+1 \text{“} & \text{Zu zeigen: } (a+b)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i}. \end{array}$$

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \stackrel{\text{I.Vor.}}{=} (a+b) \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i} \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{i+1} b^{n-i} + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n+1-i} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} a^i b^{n-(i-1)} + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n+1-i} \end{aligned}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \binom{n}{i-1} &= \frac{n!}{(i-1)!(n+1-i)!} & \binom{n}{i} &= \frac{n!}{i!(n-i)!} \\ &= \frac{i}{n+1} \frac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!} & &= \frac{n+1-i}{n+1} \frac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!} \\ &= \frac{i}{n+1} \binom{n+1}{i} & &= \frac{n+1-i}{n+1} \binom{n+1}{i} \end{aligned}$$

Die Nebenrechnung können wir nun oben einsetzen.

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow (a+b)^{n+1} &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{i}{n+1} \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i} + \sum_{i=0}^n \frac{n+1-i}{n+1} \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i} \\
 &= \sum_{i=0}^{n+1} \frac{i}{n+1} \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i} + \sum_{i=0}^{n+1} \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i} \\
 &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} a^i b^{n+1-i}
 \end{aligned}$$

□

3.3. Zusammenhang von Bézierkurven und Bernstein-Polynomen

Lemma 3. Seien b_0, b_1, \dots, b_n die Kontrollpunkte einer Bézierkurve. Dann gilt für $r \in \{0, \dots, n\}$ und $i \in \{0, \dots, r\}$:

$$b_i^{[r]}(t) = \sum_{j=0}^r b_{i+j} B_j^{[r]}(t) \text{ mit } b_i^{[0]}(t) = b_i \text{ für } i = 0, \dots, n.$$

Beweis. per Induktion über r

Induktionsanfang: $r = 0$ $\quad \sum_{j=0}^r b_{i+j} B_j^{[r]}(t) = b_i B_0^{[0]}(t) = b_i = b_i^{[0]}(t)$
Induktionsschritt: „ $r \rightarrow r+1$ “ \quad Zu zeigen ist: $b_i^{[r+1]}(t) = \sum_{j=0}^{r+1} b_{i+j} B_j^{[r+1]}(t)$

$$\begin{aligned}
 b_i^{[r+1]}(t) &\stackrel{\text{Def.}}{=} (1-t)b_i^{[r]}(t) + t b_{i+1}^{[r]}(t) \\
 &\stackrel{\text{I.Vor.}}{=} (1-t) \left(\sum_{j=0}^r b_{i+j} B_j^{[r]}(t) \right) + t \left(\sum_{j=0}^r b_{i+1+j} B_j^{[r]}(t) \right) \\
 &= (1-t) \left(\sum_{j=0}^r b_{i+j} B_j^{[r]}(t) \right) + t \left(\sum_{j=1}^{r+1} b_{i+j} B_{j-1}^{[r]}(t) \right) \\
 &= (1-t) \left(\sum_{j=0}^{r+1} b_{i+j} B_j^{[r]}(t) \right) + t \left(\sum_{j=0}^{r+1} b_{i+j} B_{j-1}^{[r]}(t) \right), \text{ da } B_{r+1}^{[r]}(t) = 0 \text{ und } B_{-1}^{[r]}(t) = 0 \\
 &= \sum_{j=0}^{r+1} b_{i+j} \left[(1-t) B_j^{[r]}(t) + t B_{j-1}^{[r]}(t) \right] \\
 &= \sum_{j=0}^{r+1} b_{i+j} B_j^{[r+1]}(t) \quad \text{wegen Lemma ??}
 \end{aligned}$$

□

Satz 3. (Darstellung von Bézierkurven mittels Bernsteinpolynomen) Für die Punkte einer Bézierkurve gilt:

$$B[b_0, \dots, b_n](t) = \sum_{j=0}^n b_j B_j^{[n]}(t)$$

Beweis. Per Definition gilt: $B[b_0, \dots, b_n](t) = b_0^{[n]}(t) \stackrel{\text{Lemma ??}}{=} \sum_{j=0}^n b_j B_j^{[n]}(t)$.

□

4. Eigenschaften von Bézierkurven

4.1. Konvexe Hülleneigenschaft

Definition 5. Die konvexe Hülle von Punkten b_0, \dots, b_n ist die Menge $\left\{ \sum_{j=0}^n \lambda_j b_j \mid \lambda_j \geq 0, \sum_{j=0}^n \lambda_j = 1 \right\}$.

Lemma 4. Zur konvexen Hülle von Punkten b_0, \dots, b_n gehören alle Punkte der Strecken, die die Punkte b_0, \dots, b_n paarweise verbinden. Das größte Polygon, das aus diesen Verbindungsstrecken gebildet werden kann, bildet (inklusive seiner inneren Punkte) die konvexe Hülle von b_0, \dots, b_n .

Beweis.

- 1) Für die Punkte z , die auf der Strecke zwischen b_0 und b_1 liegen, existiert ein $\lambda \in [0, 1]$, so dass

$$z = \lambda b_0 + (1 - \lambda) b_1 = \sum_{j=0}^n \lambda_j b_j \text{ mit } \lambda_0 = \lambda, \lambda_1 = 1 - \lambda, \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Also gehört die Strecke zwischen b_0 und b_1 zur konvexen Hülle.

- 2) Dies gilt analog für alle Punkte auf den Verbindungsstrecken zwischen b_i und b_j für $i, j = 0, \dots, n$.
- 3) Sei z ein beliebiger Punkt des größten Polygons. Dann finden wir Punkte b_i, b_j und b_k so, dass z auf der Strecke zwischen dem Punkt b_i und einem Punkt z^* auf der Strecke von b_j nach b_k liegt. Somit existieren $\lambda \in [0, 1]$ und $\lambda^* \in [0, 1]$, so dass gilt:

$$z = \lambda^* b_i + (1 - \lambda^*) z^* = \lambda^* b_i + (1 - \lambda^*) [\lambda b_j + (1 - \lambda) b_k]$$

Setze $\lambda_i = \lambda^*, \lambda_j = (1 - \lambda^*) \lambda, \lambda_k = (1 - \lambda^*) (1 - \lambda)$ und alle anderen $\lambda_l = 0$ (für $l \neq i, l \neq j, l \neq k$).

$$\Rightarrow z = \sum_{l=0}^n \lambda_l b_l \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^n \lambda_l &= \lambda_i + \lambda_j + \lambda_k = \lambda^* + (1 - \lambda^*) \lambda + (1 - \lambda^*) (1 - \lambda) \\ &= \lambda^* + (1 - \lambda^*) = 1. \end{aligned}$$

Da $\lambda \in [0, 1]$ und $\lambda^* \in [0, 1]$, so gilt $\lambda_i = \lambda^* \geq 0, \lambda_j = (1 - \lambda^*) \lambda \geq 0$ und $\lambda_k = (1 - \lambda^*) (1 - \lambda) \geq 0$. Somit gehört z zur konvexen Hülle.

- 4) Es bleibt zu zeigen, dass jedes z der konvexen Hülle auch zu dem größtmöglichen Polygon gehört. Der Beweis wurde mangels Zeit nicht vorgeführt.

□

Satz 4. Das Bild der Bézierkurve $B[b_0, \dots, b_n](t)$ liegt in der konvexen Hülle von b_0, \dots, b_n .

Beweis. Satz ?? liefert $B[b_0, \dots, b_n](t) = \sum_{j=0}^n b_j B_j^{[n]}(t)$. Wir setzen $\lambda_j := B_j^{[n]}(t)$. Dann bleibt zu zeigen:

1) $\sum_{j=0}^n \lambda_j = 1$ Dies gilt wegen $\sum_{j=0}^n \lambda_j = \sum_{j=0}^n B_j^{[n]}(t) \stackrel{\text{Lemma ??}}{=} 1$.

2) $\lambda_j \geq 0 \quad \forall j = 0, \dots, n$ Dies gilt wegen $\lambda_j = B_j^{[n]}(t) \stackrel{\text{Def.}}{=} \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} \geq 0$ für $t \in [0, 1]$.

□

4.2. Die Ableitung von Bézierkurven

Satz 5.

$$\frac{d}{dt}B[b_0, \dots, b_n](t) = n \sum_{j=0}^{n-1} (b_{j+1} - b_j) B_j^{[n-1]}(t)$$

Beweis.

Nach Satz 2.4 gilt: $B[b_0, \dots, b_n](t) = \sum_{j=0}^n b_j B_j^{[n]}(t)$ mit $B_j^{[n]}(t) = \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j}$. Für die Ableitung der Bernstein-Polynome gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} B_j^{[n]}(t) &= \binom{n}{j} j t^{j-1} (1-t)^{n-j} - \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j-1} (n-j) \\ &= n \binom{n-1}{j-1} t^{j-1} (1-t)^{n-j} - n \binom{n-1}{j} t^j (1-t)^{n-j-1} \\ &= n B_{j-1}^{[n-1]}(t) - n B_j^{[n-1]}(t) \end{aligned}$$

Damit folgt für die Ableitung der Bézierkurve:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} B[b_0, \dots, b_n](t) &= \sum_{j=0}^n b_j \left(n B_{j-1}^{[n-1]}(t) - n B_j^{[n-1]}(t) \right) \\ &= n \left(\sum_{j=0}^n b_j B_{j-1}^{[n-1]}(t) - \sum_{j=0}^n b_j B_j^{[n-1]}(t) \right) \\ &= n \left(\sum_{j=1}^n b_j B_{j-1}^{[n-1]}(t) - \sum_{j=0}^{n-1} b_j B_j^{[n-1]}(t) \right) \\ &= n \left(\sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1} B_j^{[n-1]}(t) - \sum_{j=0}^{n-1} b_j B_j^{[n-1]}(t) \right) \end{aligned}$$

□

5. Splines in Bézierform

Definition 6. Ein Spline in Bézierform ist eine Zusammensetzung von Bézierkurven, bei denen der Endpunkt der vorhergehenden Bézierkurve mit dem Anfangspunkt der nächsten Bézierkurve übereinstimmt.

Problem: Splines in Bézierform können „Knicke“ haben, siehe folgende Abbildungen.

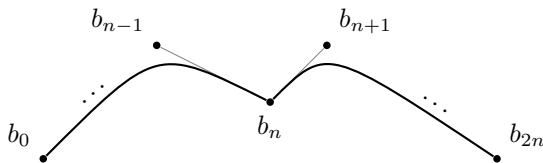


Abbildung 6: Ein nicht differenzierbarer Spline

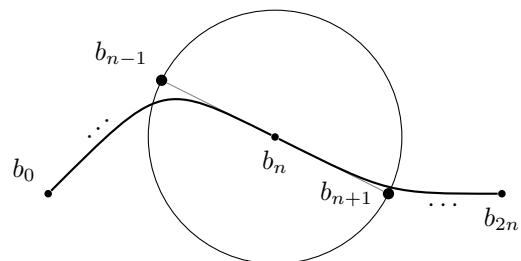


Abbildung 7: Ein differenzierbarer Spline

Satz 6. Ein Spline in Bézierform, der aus zwei Bézierkurven $B[b_0, \dots, b_n]$ und $B[b_n, \dots, b_{2n}]$ zusammengesetzt ist, ist differenzierbar, falls gilt:

$$b_{n+1} - b_n = b_n - b_{n-1}.$$

Beweis. Es ist zu zeigen, dass die Ableitung der Bézierkurve $B[b_0, \dots, b_n]$ im Punkt b_n und die Ableitung der Bézierkurve $B[b_n, \dots, b_{2n}]$ im Punkt b_n übereinstimmen. Dazu muss man die Ableitung der Bézierkurve $B[b_0, \dots, b_n]$ in $t = 1$ und die Ableitung der Bézierkurve $B[b_n, \dots, b_{2n}]$ im Punkt $t = 0$ auswerten.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} B[b_0, \dots, b_n](t) \Big|_{t=1} = \frac{d}{dt} B[b_n, \dots, b_{2n}](t) \Big|_{t=0} \\ \Leftrightarrow & n \sum_{j=0}^{n-1} (b_{j+1} - b_j) B_j^{[n-1]}(t) \Big|_{t=1} = n \sum_{j=0}^{n-1} (b_{n+j+1} - b_{n+j}) B_j^{[n-1]}(t) \Big|_{t=0} \\ \Leftrightarrow & n(b_n - b_{n-1}) = n(b_{n+1} - b_n) \\ \Leftrightarrow & b_n - b_{n-1} = b_{n+1} - b_n \end{aligned}$$

Hierbei haben wir ausgenutzt, dass

$$B_j^{[n-1]}(1) = \begin{cases} 0, & \text{für } j \neq n-1 \\ 1, & \text{für } j = n-1 \end{cases} \quad \text{und} \quad B_j^{[n-1]}(0) = \begin{cases} 0, & \text{für } j \neq 0 \\ 1, & \text{für } j = 0 \end{cases} \quad \text{gilt.} \quad \square$$

6. Programm zur Erzeugung von Splines zur Hindernisumfahrung

Das Programm sucht selbstständig geeignete Kontrollpunkte und berechnet die Bézierkurven sukzessive von Start bis Ziel. Die Hindernisse können variabel vom Nutzer eingegeben werden.

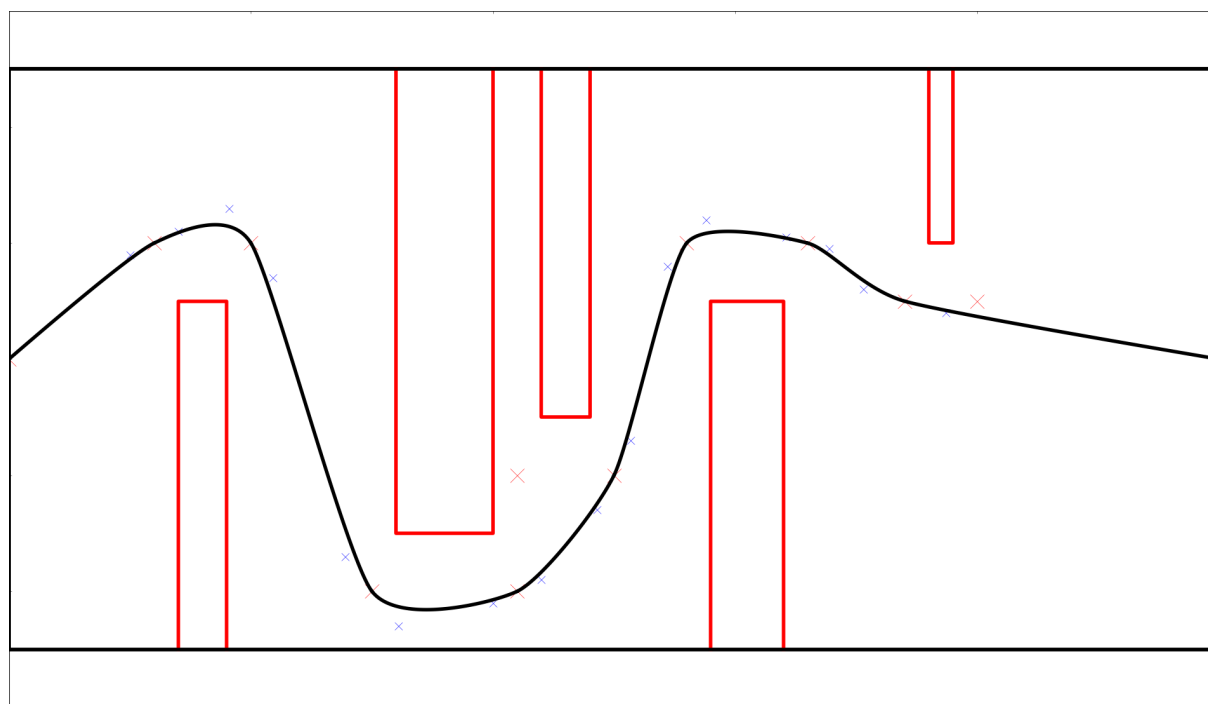


Abbildung 8: Beispiellösung einer Hindernisumfahrung

Realisierung des Programms zur Pfadfindung in Python: Mit der Methode createControlPoints werden die Kontrollpunkte so gelegt, dass deren konvexe Hülle die Hindernisse nicht schneidet. Mit der Routine plotbezier wird eine Bézierkurve mit den entsprechenden Kontrollpunkten gezeichnet.

```
def plotPath(obstacles , lastControlPoint):
    plt.pause(0.5)
    if len(obstacles)>=3:
        CPS = createControlPoints(obstacles[0], obstacles[1], obstacles[2])
        drawPoints(CPS, 10, "bx")
        plt.pause(1)
    coords_x = []
    coords_y = []
    coords_x.append(obstacles[0][0])
    coords_y.append(obstacles[0][1])
    if len(lastControlPoint)>0:
        coords_x.append(lastControlPoint[0])
        coords_y.append(lastControlPoint[1])
    if len(obstacles)>=3:
        coords_x.append(CPS[0][0])
        coords_y.append(CPS[0][1])
    coords_x.append(obstacles[1][0])
    coords_y.append(obstacles[1][1])
    plotbezier(coords_x , coords_y)
    obstacles.pop(0)
    if len(obstacles)>=2:
        plotPath(obstacles ,CPS[1]);
```

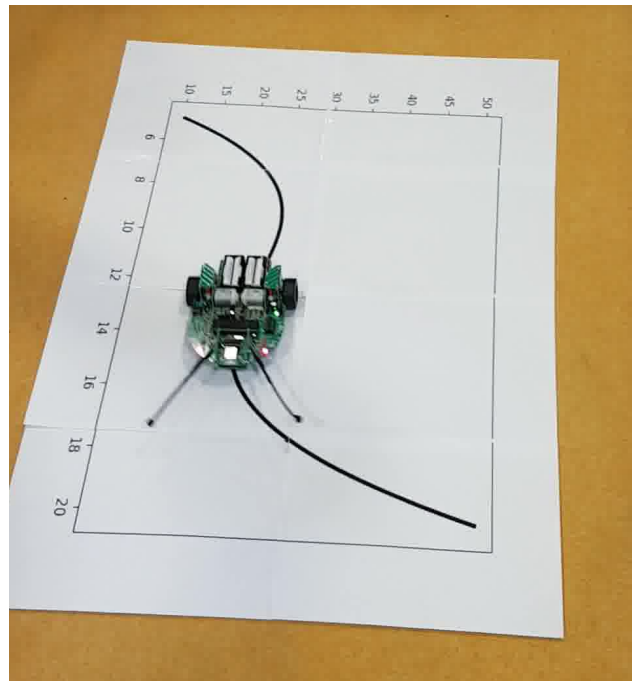


Abbildung 9: Am Ende testeten wir die berechneten Splines mit unserem Miniroboter Nibabee. Da einer der Odometriesensoren defekt war, nutzten wir die Liniensensoren. Damit konnte der Miniroboter den zuvor berechneten Spline-Pfaden folgen.