Skalarprodukträume

Teilnehmer:

Lukas Flesch	Herder-Gymnasium
Hagen Glauche	Herder-Gymnasium
Severin Göbel	Herder-Gymnasium
Tim Sebastian Köhler	Andreas-Gymnasium
Daniel Lewin	Herder-Gymnasium
Julia Rothe	Käthe-Kollwitz-Gymnasium
Pablo Suarez Halbach	Andreas-Gymnasium
Lara Théallier	Heinrich-Hertz-Gymnasium

mit tatkräftiger Unterstützung durch:

Eren Uçar	Humboldt-Universität zu Berlin

Gruppenleiter:

Konrad Gröger	Humboldt-Universität zu Berlin

Die Gruppe hat zunächst gelernt, dass und wie man die Begriffe *Skalarprodukt* und *Skalarproduktraum* im Rahmen der Theorie der Räume reellwertiger Funktionen definieren kann. Sie hat sich mit unterschiedlichen Beispielen von Skalarprodukträumen vertraut gemacht. Anschließend hat die Gruppe gelernt, dass man überall dort, wo man über ein Skalarprodukt verfügt, auch über den Abstand zweier Objekte und über den Winkel zwischen zwei Objekten reden kann. Die Gruppe hat das erworbene Wissen zur theoretischen Lösung eines Approximationsproblems genutzt. Sie hat außerdem ein Computerprogramm erarbeitet, dass zu einer gegebenen stetigen Funktion auf dem Intervall $[0, 1]$ eine bestmögliche Approximation durch eine Überlagerung von Sinusschwingungen unterschiedlicher Frequenz liefert. Die Abbildung auf der letzten Seite des Berichts zeigt ein spezielles Approximationsergebnis.

1. Grundbegriffe und Definitionen

Der Gegenstand unserer Arbeit sind durchgehend reellwertige Funktionen mit einem beliebigen nichtleeren Definitionsbereich X.

Mit $\mathbb{R}^X$bezeichnen wir im Folgenden die Menge aller reellwertigen Funktionen mit Definitionsbereich X.

Definition 1. Lineare Operationen in $\mathbb{R}^X$

Sei $u, v \in \mathbb{R}^X$ und $a \in \mathbb{R}$. Wir definieren folgende Operationen:

1. Addition: $(u + v)(x) \coloneqq u(x) + v(x)$ für alle $x \in X$;
2. Multiplikation mit Skalaren: $(a \cdot u)(x) \coloneqq a \cdot u(x)$ für alle $x \in X$.

Man addiert also zwei Funktionen, indem man die Funktionswerte punktweise addiert. Die Multiplikation mit einem Skalar a wird ebenfalls punktweise durchgeführt. Allerdings ist es wichtig zu verinnerlichen, dass das Zeichen für Addition von Funktionen bzw. für die Multiplikation mit Skalaren gleich dem Zeichen für die Addition und Multiplikation von reellen Zahlen ist, obwohl die Operation eindeutig anders ist: Es werden *Funktionen* und nicht Zahlen addiert bzw. multipliziert.

Definition 2. Eine Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^X$ heißt *Teilraum* von dem Gesamtraum $\mathbb{R}^X$, wenn gilt

1. $u, v \in V \implies u + v \in V$,
2. $u \in V,\ a \in \mathbb{R} \implies au \in V$,
3. $0 \in V$.

Die Räume $\mathbb{R}^X$ und ihre Teilräume nennen wir im Folgenden *Funktionenräume*. Jeder Funktionenraum enthält also die Nullfunktion, und bei Addition zweier Funktionen aus einem Funktionenraum und Multiplikation einer Funktion mit einem Skalar muss sich eine Funktion aus dem gleichen Funktionenraum ergeben. Jedoch muss erneut zwischen der *Nullfunktion*, bei der alle Funktionswerte den Wert 0 annehmen, und der reellen Zahl 0 unterschieden werden.

1.1. Beispiele für Funktionenräume

1. Es sei $V \coloneqq C([a, b])$ definiert als Menge aller stetigen Funktionen auf dem abgeschlossenen Intervall von a bis b. Dann ist V ein Teilraum von $\mathbb{R}^X$ für $X = [a, b]$ und damit ein Funktionenraum. Die Menge aller stetigen Funktionen ist nämlich abgeschlossen bezüglich der Addition sowie der Multiplikation mit Skalaren. Es gilt für $u, v \in C([a, b])$ und $c \in \mathbb{R}$:

   $$(u + v) \in C([a, b]),$$
   $$(c \cdot u) \in C([a, b]).$$

   Außerdem ist die Nullfunktion stetig und somit in V enthalten.
2. Für X $= \mathbb{N}$ ist $\mathbb{R}^X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen von reellen Zahlen.
3. Die Menge aller beschränkten Folgen ist ein Teilraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
4. Die Menge aller positiven Funktionen auf einer Menge X ist **kein** Teilraum von $\mathbb{R}^X$, da die Multiplikation mit dem Skalar -1 eine Funktion mit nicht-positiven Werten ergibt.

Es sei $u, v, w \in \mathbb{R}^X$. Es wird ein w in Abhängigkeit von u und v gesucht, sodass gilt: $u + w = v$

Als Lösung dieses Problems wird die Subtraktion von zwei Funktionen (!) folgendermaßen definiert:

$$(u - v) := u + (-1) \cdot v$$

Damit gilt $w = v - u$. Weiterhin ist die Definition sinnvoll, da insbesondere gilt $u - u = 0$. Beim Subtrahieren einer Funktion von sich selbst ergibt sich also die Nullfunktion in Analogie zur reellen Zahl 0 bei der Subtraktion einer reellen Zahl von sich selbst.

Definition 3. Skalarprodukt

Unter einem *Skalarprodukt* („Skalar“ deutet auf ein reelles Ergebnis, „Produkt“ auf zwei Argumente) auf einem Funktionenraum V versteht man eine Funktion $s : V \times V \to \mathbb{R}$ mit zwei Funktionen aus dem Funktionenraum als Argumenten, reellen Zahlen als Werten und den folgenden Eigenschaften für $u, \tilde{u}, v \in V,\ a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \textbf{Symmetrie}\quad & s(u,v) = s(v,u), \\ \textbf{Additivität}\quad & s(u+\tilde{u},v) = s(u,v) + s(\tilde{u},v), \\ \textbf{Homogenität}\quad & s(a \cdot u, v) = a \cdot s(u,v), \\ \textbf{positive Definitheit}\quad & s(u,u) > 0 \text{ für } u \neq 0. \end{aligned}$$

Es gibt viele Funktionen, die diese Bedingunen erfüllen, es gibt also mehrere Skalarprodukte. Beispielsweise ist das üblicherweise in der Physik verwendete Skalarprodukt nur ein mögliches Skalarprodukt nach der obigen Definition.

Historische Kurzbezeichnungen für das Skalarprodukt sind $u \cdot v$, (u, v) und $(u|v)$. Letzteres hat sich in der mathematischen Literatur weitgehend durchgesetzt, trotz der Ähnlichkeit zu Punktkoordinaten. Damit lässt sich z.B. die Regel der Additivität für Skalarprodukte als $(u + \tilde{u}|v) = (u|v) + (\tilde{u}|v)$ formulieren.

Für $n \in \mathbb{N}$ setzt man zur Abkürzung $\mathbb{R}^n := \mathbb{R}^{\{1,2,\ldots,n\}}$. Beispielsweise lassen sich mit $\mathbb{R}^2$ alle Punkte in der Ebene als Funktionen auf $\{1, 2\}$ beschreiben.

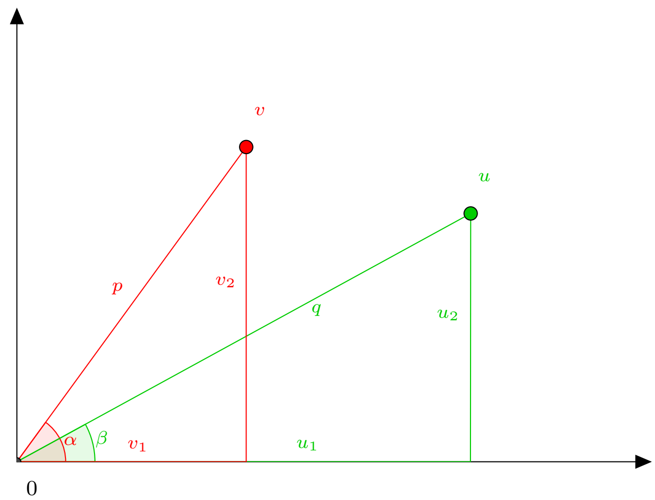
Beispiele. Skalarprodukte

1. Es sei $V := \mathbb{R}^1$ und $u, v \in V$.
   Dann wird durch $s(u, v) := u \cdot v$ ein Skalarprodukt s auf V definiert; dies ist die normale Multiplikation von reellen Zahlen. Die Bedingungen der Symmetrie, Additivität und Homogenität für Skalarprodukte ergeben sich aus dem Kommutativitäts-, Distributiv- und Assoziativitätsgesetz für reelle Zahlen. Die positive Definitheit gilt, da das Quadrat einer reellen Zahl ungleich 0 immer positiv ist.

2. Es sei $V := \mathbb{R}^n$ und $u, v \in V$; dabei sei $u = (u_1, \ldots, u_n)$, $v = (v_1, \ldots, v_n)$.
   Dann wird durch
   $$s(u,v) := \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \text{ für } u, v \in V$$
   ein Skalarprodukt s auf V definiert. Die einzelnen Forderungen lassen sich hierbei punktweise analog zu Fall 1 zeigen. Dieses Skalarprodukt wird auch als *Standardskalarprodukt* auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

3. Es sei $V := C([0,1])$ und $u, v \in V$.
   Dann wird durch
$$s(u,v) := \int_0^1 u(x)v(x)dx \tag{1}$$
   ein Skalarprodukt s auf V definiert. Die Symmetrie entspricht erneut punktweise der Kommutativität, die Linearität des Skalarprodukts lässt sich auf die Linearität des Integrals zurückführen. Zum Nachweis der positiven Definitheit nutzt man die Eigenschaft von u, an mindestens einer Stelle von 0 verschieden zu sein, aus, und schätzt das Integral geschickt mithilfe der ε-δ-Definition der Stetigkeit ab.

4. Es seien $u, v \in \mathbb{R}^2$. Dann wird durch $s(u,v) := pq\cos(\alpha - \beta)$ ein mögliches Skalarprodukt s auf $\mathbb{R}^2$ definiert. (Die Bedeutung von p, q, α, β ist der Abbildung zu entnehmen.) Tatsächlich entspricht es dem Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ für $n = 2$. Der Beweis dafür findet sich unter der folgenden Zeichnung.



$$\begin{array}{rclrcl} u_1 & = & p \cdot \cos(\alpha), & u_2 & = & p \cdot \sin(\alpha), \\ v_1 & = & q \cdot \cos(\beta), & v_2 & = & q \cdot \sin(\beta); \end{array}$$

$$\begin{aligned} s(u|v) &= pq(\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)) \\ &\underset{Additionstheorem}{=} pq \cdot \cos(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Da es für Funktionenräume mehrere mögliche Skalarprodukte gibt, man jedoch oft nur von einem sprechen möchte, wird der Begriff *Skalarproduktraum* eingeführt, indem ein Funktionenraum mit **einem** passenden Skalarprodukt „zusammengepackt“ wird.

Definition 4. Skalarproduktraum

Unter einem *Skalarproduktraum* versteht man ein Paar (V, s), bestehend aus einem Funktionenraum V und einem Skalarprodukt $s : V \times V \to \mathbb{R}$ auf diesem Raum V.

2. Abstände und Winkelmessungen in Skalarprodukträumen

Im Folgenden sei $(V, (\cdot|\cdot))$ ein Skalarproduktraum. Nun können Begriffe aus der Geometrie auf Funktionen übertragen werden. Dafür werden Begriffe definiert, deren Sinn dann deutlich gemacht wird.

Definition 5. Die Größe

$$|u| \quad := \quad \sqrt{(u|u)} \quad \text{für alle } u \in V$$

wird *Betrag* oder auch *Länge* von u genannt.

Beispiele. Für $V := \mathbb{R}^1$ mit dem Skalarprodukt $(u|v) := u \cdot v$ stimmt $\sqrt{(u|u)}$ offenbar mit dem üblichen Betrag überein. Die Definition **??** ist also im Einklang mit unserer bisherigen Benutzung des Begriffs Betrag.

Mit dieser Definition können einige Sätze allgemein formuliert werden:

Satz 1. *Es gilt $|au| = |a||u|$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und $u \in V$ wegen der Homogenität der Skalarprodukte.*

Satz 2. *Für beliebige $u, v \in V$ gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:*

$$|(u|v)| \quad \leq \quad |u| \cdot |v|.$$

Beweis: Nach der positiven Definitheit, der Additivität und der Homogenität von Skalarprodukten gilt für beliebige $u, v \in V$ und $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq (u + av|u + av) \\ &= (u|u + av) + (av|u + av) \\ &= (u|u) + 2a(u|v) + a^2(v|v). \end{aligned}$$

Wir betrachten nun den letzten Ausdruck als quadratische Funktion f von a, das heißt wir definieren $f(a) := (u|u) + 2a(u|v) + a^2(v|v)$. Aus der Form geht hervor, dass diese einen Tiefpunkt besitzt; wir lösen die notwendige Bedingung für einen solchen (dabei dürfen wir $v \neq 0$ annehmen, weil für $v = 0$ die Behauptung trivial ist):

$$\begin{aligned} f'(a) &= 2(u|v) + 2a(v|v), \\ f'(a_0) &= 0 \\ \iff \quad a_0 &= -\frac{(u|v)}{(v|v)}\,. \end{aligned}$$

Es gilt mit dieser Lösung für a_0:

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(a_0) \\ &= (u|u) - 2\frac{(u|v)^2}{(v|v)} + \frac{(u|v)^2}{(v|v)} \\ &= (u|u) - \frac{(u|v)^2}{(v|v)} \\ \iff \quad (u|v)^2 &\leq (u|u)(v|v) \\ \iff \quad |(u|v)| &\leq |u||v|. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Auch die nächste Aussage ist aus der Geometrie in der Ebene bekannt und lässt sich nun verallgemeinern:

Korollar 1. Für beliebige $u, v \in V$ gilt die Dreiecksungleichung

$$|u + v| \quad \leq \quad |u| + |v|.$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} |u+v|^2 &= (u+v|u+v) \\ &= (u|u) + \underbrace{2(u|v)}_{\text{Cauchy-Schwarz}} + (v|v) \\ &\leq |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2 \\ &= (|u|+|v|)^2 \\ \iff |u+v| &\leq |u|+|v|. \end{aligned}$$

□

Die Größe $|u-v|$ wird als Abstand von u und v interpretiert. Mit dem neuen Abstandsbegriff lassen sich nun weitere Begriffe aus dem $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ auf alle Funktionenräume übertragen.

Beispiele. Man definiert die *Sphäre* vom Radius $s > 0$ um einen Punkt $u_0 \in V$ durch die Vorschrift:

$$S := \{u \in V; |u - u_0| = s\}.$$

Ersetzt man $=$ durch $\leq$, so erhält man die entsprechende Kugel.

Auch der Begriff der *Konvergenz* lässt sich definieren. Hier betrachtet man nun Funktionen-Folgen: Man sagt, die Folge (u_n) konvergiere gegen $v \in V$, wenn $\lim_{n\to\infty} |u_n - v| = 0$ ist. Hierbei ist zu beachten, dass $|u_n - v|$, also der Abstand von u_n und v stets ein reeller Wert ist. Auf den reellen Zahlen kennen wir den Grenzwertbegriff bereits, deshalb ist diese Definition auch formal zulässig. Weiterhin sagt man, eine Folge (u_n) sei eine Cauchy-Folge, wenn $\lim_{n,m\to\infty} |u_n - u_m| = 0$ ist. Allerdings sind Cauchy-Folgen nicht (wie etwa in $\mathbb{R}^n$) notwendig konvergent. Skalarprodukträume, in denen jede Cauchy-Folge konvergiert, nennt man *Hilbert*-Räume.

Die Umformung der Ungleichung von Cauchy-Schwarz ergibt:

$$\frac{(u|v)}{|u||v|} \in [-1,1] \text{ für } u \neq 0,\ v \neq 0.$$

Somit gibt es genau ein $\alpha \in [0,\pi]$, für das

$$\frac{(u|v)}{|u||v|} = \cos\alpha$$

ist. Damit kommen wir zu einer Definition von Winkeln zwischen Funktionen, die nicht gleich 0 sind:

Definition 6. Ist $\dfrac{(u|v)}{|u||v|} = \cos\alpha$ und $\alpha \in [0,\pi]$, so definieren wir α als den *Winkel* zwischen u und v.

Mit dem Begriff des Winkels können wir nun auch rechte Winkel zwischen Funktionen betrachten, also den Winkel $\alpha = \pi/2$. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{(u|v)}{|u||v|} &= \cos(\frac{\pi}{2}) \\ \iff \frac{(u|v)}{|u||v|} &= 0 \\ \iff (u|v) &= 0. \end{aligned}$$

Zwei Elemente $u, v \in V$ nennen wir *orthogonal*, wenn $(u|v) = 0$ ist. Hierbei fordern wir nicht, dass die Faktoren von 0 verschieden sind.

Dass der Winkel zwischen einem Element u und sich selbst in jedem Skalarproduktraum gleich 0 ist, lässt sich leicht nachvollziehen (siehe den nächsten Absatz) und entspricht unser Intuition aus $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$.

Betrachten wir nun den Fall, dass $u, v \in V$ und v das Ergebnis einer Multiplikation der Funktion u mit einem Skalar ist, also $v = a \cdot u, a \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\frac{(u|v)}{|u| \cdot |v|} = \frac{a \cdot (u|u)}{|a| \cdot |u| \cdot |u|} = \frac{a}{|a|}.$$

Wenn a positiv ist, so ist der Kosinus gleich 1. Daraus folgt, dass der Winkel zwischen u und v gleich 0 ist; die Funktionen zeigen in die „gleiche" Richtung.

Wenn a negativ ist, so ist der Kosinus gleich -1. Daraus folgt, dass der Winkel zwischen u und v gleich π ist; die Funktionen zeigen in „entgegengesetzte" Richtungen.

Beispiel 1. Um eine Vorstellung der Arbeit mit dem neuen Orthogonalitätsbegriff zu erhalten, prüfen wir im folgenden Beispiel, ob zwei Vektoren u und v im Skalarproduktraum $(\mathbb{R}^3, (\cdot|\cdot))$ mit Standardskalarprodukt orthogonal zu einander sind. Es sei

$$u := (\,2, -9,\,4), \;\; v := (\,5,\,2,\,2).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} (u|v) &= u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 \\ &= 2 \cdot 5 + (-9) \cdot 2 + 4 \cdot 2 \\ &= 10 - 18 + 8 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Da das Skalarprodukt der beiden Vektoren gleich null ist, sind sie orthogonal zueinander. Wer dieses Ergebnis mit der bekannten Vorstellung des $\mathbb{R}^3$ vergleicht, wird erkennen, dass diese übereinstimmen. Dies rechtfertigt auch den Gebrauch des verwendeten Skalarprodukts als „Standard".

Definition 7. Ein $v \in V$ heißt *orthogonal zu* $U \subset V$, falls $(u|v) = 0$ für alle $u \in U$.

Definition 8. Eine Menge $M \subset V$ heißt *Orthonormalsystem* im Skalarproduktraum $(V, (\cdot|\cdot))$, falls

$$(u|v) = 0 \text{ für alle } u, v \in M \text{ mit } u \neq v, \tag{2}$$
$$|u| = 1 \text{ für alle } u \in M. \tag{3}$$

Beispiele. Ein einfaches Beispiel für ein Orthonormalsystem stellen die Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^3$ dar:

$$\begin{array}{lll} V = \mathbb{R}^3, & X = \{1; 2; 3\}, & u = (u_1, u_2, u_3), \\ & M := \{e_1, e_2, e_3\}, & \\ e_1 = (1,0,0), & e_2 = (0,1,0), & e_3 = (0,0,1). \end{array}$$

Wichtig: Wer den $\mathbb{R}^3$ vor Augen hat, wird schnell die Orthogonalität der Vektoren e_n für gegeben nehmen: Im Skalarproduktraum können wir dies aber nicht ohne weiteres tun – wir brauchen zunächst ein Skalarprodukt.

Hierzu wählen wir das Standarskalarprodukt im $\mathbb{R}^3$. Zur Erinnerung: Es ist

$$(u|v) := \sum_{i=1}^{3} u_i v_i.$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} (e_1|e_2) &= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0, \\ (e_1|e_3) &= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1, \\ (e_2|e_3) &= 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1. \end{aligned}$$

Je zwei verschiedene Elemente aus M sind also orthogonal zueinander. Die Normierung bezüglich des Skalarproduktes kann jeder leicht selbst nachprüfen.

Die Menge M ist also (wie erwartet) ein Orthonormalsystem in $(\mathbb{R}^3, (\cdot|\cdot))$.

Satz 3. *Für zwei Elemente u, v aus einem beliebigen Skalarproduktraum $(V, (\cdot|\cdot))$ gilt*

$$|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2,$$

genau dann wenn u und v orthogonal sind.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} |u+v|^2 &= (u+v|u+v) \\ &= |u|^2 + |v|^2 + \underbrace{2 \cdot (u|v)}_{=0,\text{ genau dann, wenn u und v orthogonal sind}} \end{aligned}$$

□

Bemerkung 1. Dieser Satz stellt ein Analogon zum Satz des Pythagoras dar. Er ermöglicht die Übertragung intuitiver Vorstellungen aus $\mathbb{R}^2$ auf beliebige Skalarprodukträume.

3. Approximation in Skalarprodukträumen

Es kann sich manchmal als schwierig erweisen, Funktionen im Computer zu speichern bzw. die Werte davon auszurechnen. Daher kann es sinnvoll sein, solche Funktionen durch „bessere" Funktionen zu approximieren. Dies soll hier auf Basis der neu eingeführten Begriffe probiert werden.

Im folgenden sei $(V, (\cdot|\cdot))$ ein Skalarproduktraum.

Definition 9. Für $n \in \mathbb{N}$ wird jeder Ausdruck der Form $\sum_{i=1}^n a_i u_i$ $(a_i \in \mathbb{R}, u_i \in V)$ als *Linearkombination* von $u_1, u_2, \ldots, u_n$ bezeichnet. Weiterhin definiert man $\operatorname{span}\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ als die Menge aller Linearkombinationen von $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Satz 4. *Die Menge aller Linearkombinationen von $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ist ein Unterraum von V.*

Wir verzichten darauf, den einfachen Beweis dieses Satzes anzugeben.

Ist $U = \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_n\}$, so sagt man auch, U sei der von $u_1, \ldots, u_n$ *aufgespannte* Teilraum.

Die „schwierige" Funktion $v \in V$ soll approximiert werden. Es sei U Teilraum von V. Wir stellen uns die Aufgabe, ein $u \in U$ derart zu finden, dass $|v-u|$ minimal wird. Aus dem Teilraum U soll also eine Funktion gefunden werden, die v bestmöglich approximiert.

Wir nehmen zur Vereinfachung an, dass $U = \operatorname{span}\{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ ist; dabei bezeichnet $\{e_1, \ldots e_n\}$ ein Orthonormalsystem in V.

Für die gesuchte Funktion u machen wir den Ansatz $u = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i$, stellen sie also als Linearkombination dar. Die Aufgabe besteht dann darin, die Koeffizienten $a_1, \ldots, a_n$ nach Möglichkeit so zu bestimmen, dass $|v-u|$ minimal wird. Mithilfe der Orthogonalität der Funktionen e_i findet man

$$\begin{aligned}
|v-u|^2 &= \Big|v-\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\Big|^2 \\
&= \Big(v-\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\Big|v-\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\Big) \\
&= (v|v) - 2\Big(v\Big|v-\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\Big) + \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\Big|\sum_{j=1}^{n} a_j e_j\Big) \\
&= |v|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} a_i (v|e_i) + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \\
&= |v|^2 + \sum_{i=1}^{n}\Big(-2a_i(v|e_i)+a_i^2\Big).
\end{aligned}$$

Der erste Summand $|v|^2$ hängt von den Koeffizienten a_i nicht ab und kann damit ignoriert werden. Jeder der Summanden in der folgenden Summe hängt nur von *einem* der a_i ab und kann deshalb leicht minimiert werden. Zu diesem Zweck ersetzen wir a_i zeitweilig durch x. Der Faktor $(v|e_i)$ (der ein Skalar ist) hängt von a_i nicht ab und wird deshalb bei der Differentiation als konstanter Faktor behandelt. Wir setzen

$$f_i(x) := -2x(v|e_i) + x^2 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Dann ist

$$f_i'(x) = -2(v|e_i) + 2x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

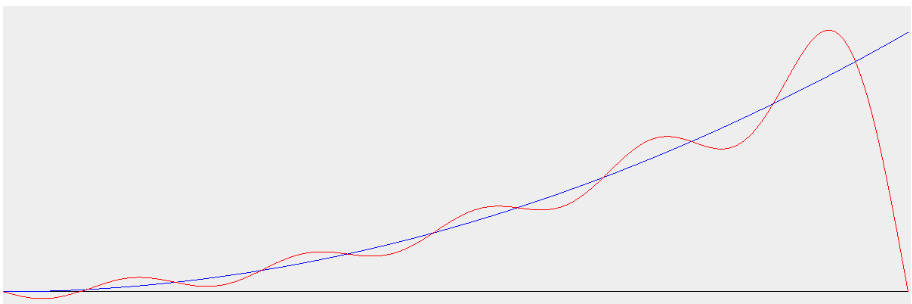
Es gilt $f_i'(x) = 0$ genau dann, wenn $x = (v|e_i)$ ist.

Daraus folgt: Der Wert $|v-u|^2$ wird genau dann minimal, wenn $u = \sum_{i=1}^{n} (v|e_i)e_i$ ist.

Das Element u ist das **einzige** Element von U, für das $v-u$ zum Teilraum U orthogonal ist. Deshalb sagt man auch, u sei ***die*** *orthogonale Projektion von v auf U.*

Die orthogonale Projektion kann auch dann definiert werden, wenn der Teilraum U zunächst nicht von einem Orthonormalsystem aufgespannt wird. Es gilt nämlich der folgende Satz, den wir zum Abschluss des Berichts ohne Beweis angeben:

Satz 5. *Jeder Teilraum von V, der von endlichen vielen Elementen $\{u_1,\dots,u_n\}$ aufgespannt wird, kann auch von einem endlichen Orthonormalsystem $\{e_1,\dots,e_m\}$ aufgespannt werden ($m \le n$).*



Approximation von $f(x) = x^2$ in $C[0,1]$, versehen mit dem in (**??**) definierten Skalarprodukt, durch eine Linearkombination von zehn aufeinander senkrecht stehenden Funktionen.