# Zahlen und Zählen – didaktische Prinzipien

Dr. Elke Warmuth

Wintersemester 2017/18

# Was ist eine Zahl?

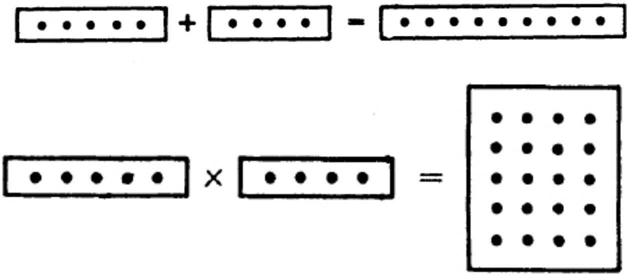
Wissen Sie, wie eine Fünf aussieht? – Nein, nicht ihr Symbol! Weder das Zeichen 5 noch V noch fünf Finger, fünf Striche oder fünf Euro. Einfach Fünf. Nur Fünf. – Keine Vorstellung?

Macht überhaupt nichts. Denn schauen wir uns die Fünf mal näher an, stellen wir fest: Es gibt sie gar nicht. Das Symbol, die Finger, die Striche, die Euro schon, aber nicht die Fünf an sich. Mögen wir sie auch jeden Tag tausendfach benutzen und vor den großen Ferien unzählige Schüler vor ihr zittern – die wahre Fünf ist ein abstraktes Konstrukt. Eine virtuelle Errungenschaft, die unsere menschliche Kultur erst möglich machte. Die Gemeinsamkeit zwischen fünf Fingern und fünf Mammutschinken zu erkennen, war ohne Zweifel einer der größten Geniestreiche des Homo sapiens. Denn obwohl damit das Zählen und Rechnen in seiner ganzen Komplexität seinen Anfang nahm, war alles, was nach Erfindung der Fünf (und der Eins, der Zwei, der Drei usw.) kam, im Vergleich zu diesem ersten Schritt naheliegend und einfach.

Quelle: Olaf Fritsche: Es werde Zahl!.

www.spektrum.de/alias/wissenschaftsgeschichte/es-werde-zahl/893496, Abruf: 25.09.17, 16:34 Uhr

- abstraktes mathematisches Objekt (Denkobjekt)
- Element eines Zahlensystems, d.h. einer Menge von Symbolen, in der man addieren und multiplizieren kann.



- Es gelten Rechenregeln.
- Zahlzeichen

Aufgabe Was ist das einfachste Zahlensystem?
Wie kann es konstruiert werden?
Welche Regeln gelten dort?

Bemerkungen:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ oder $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- Peano-Axiome – Reihenfolge – Ordinalaspekt
  Russellsche Definition – Mächtigkeit – Kardinalaspekt

Aufgabe Was kommt nach $\mathbb{N}$?

- Ende der 1. Klasse: Kinder können sich im Zahlenraum bis 20 sicher orientieren und dort rechnen.
- Ende der 2. Klasse: Kinder können sich im Zahlenraum bis 100 sicher orientieren und dort rechnen.

Verständnis für den Zahlenraum gilt als gesichert, wenn

- verschiedene Zahldarstellungen flexibel ineinander überführt werden können, z. B.
  - Zahlwort
  - Ziffernschreibweise
  - ikonische Darstellungen
  - Stellenwerttafel
- Zusammenhänge zwischen kardinalem und ordinalem Aspekt gesehen werden
- Zahlen geordnet werden können und Analogien erkannt werden können

| Sprachkonstruktion der Kinder | | Zugrunde liegende Regel |
|---|---|---|
| (10) | einszehn<br>nullzehn | einhundert<br>dreizehn |
| (12) | zweiundzehn | zweiundzwanzig |
| (20) | zweizig | vierzig |
| (13) | dreiundzehn | dreiundzwanzig |
| (103) | dreihundert | dreizehn |
| … achtundzwanzig, neunundzwanzig, zehnundzwanzig, elfundzwanzig, zwölfundzwanzig | | acht, neun, zehn, elf, zwölf |
| … achtundneunzig, neunundneunzig, hundert, einhundert, zweihundert, dreihundert | | achtundachtzig, neunundachtzig, neunzig, einundneunzig, zweiundneunzig, dreiundneunzig |

Zahlwörter bis 12 und Zehnerzahlen zehn, zwanzig, dreißig usw. müssen auswendig gelernt werden.

Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung (2001)
Erprobung mit 300 Kindern am Schulanfang

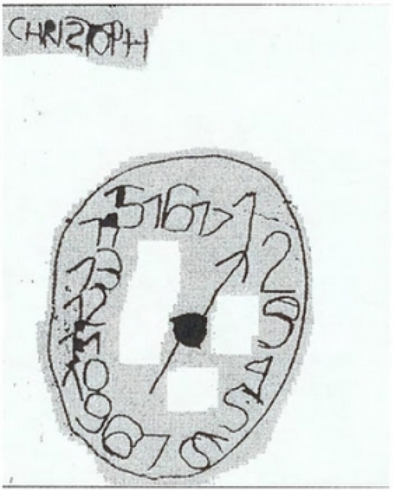
- können die Zahlwortreihe bis 20 aufsagen: 77%
- können von 9 bis 15 weiterzählen: 72%
- können 20 geordnete Klötze abzählen: 58%
- können die Augensumme von zwei Würfeln zusammenzählen: 51%
- können 17 Klötze rückwärts zählen: 32%
- ...

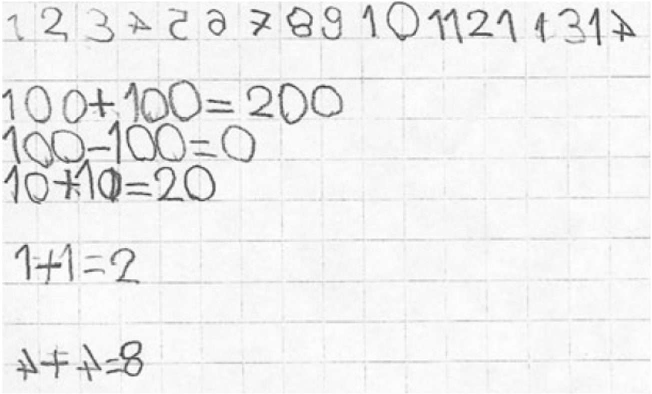
große Heterogenität, nicht über-, aber auch nicht unterschätzen

Weißblatttest:

- Welche Zahlen kennst du schon?
- Welche Rechnungen kannst du schon lösen?
- Wo begegnen dir Zahlen?
- Welches ist die kleinste/größte Zahl, die du kennst?
- ...

## Aufgreifen der Vorkenntnisse




Aufgabe der Lehrerin/des Lehrers: Diagnose der Kenntnisse und Fähigkeiten **ihrer** Kinder und Einsatz angemessener Aufgabenstellungen

Sicheres verbales Zählen ist unabdingbar für Rechenfertigkeiten, baut mentale Vorstellungen vom Zahlenraum auf.

Festigung der Zahlwortreihe:

- vorwärts
- rückwärts
- von *a* an vorwärts und rückwärts
- in Zweierschritten, Dreierschritten, ...
- im Chor, rhythmisch, mit Bewegung verbunden, ...

Abzählen = Anzahlbestimmung durch Zählen.
Das zuletzt genannte Zahlwort gibt die Anzahl an.

Zum Abzählen genügt die Kenntnis der Zahlwortreihe nicht.
Beipiel: Setzen beim Mensch-Ärgere-dich-nicht.

Prinzipien beim Abzählen:

- Eins-zu-eins-Zuordnung von Zahlwort und Objekt (Problem sie-ben)
- Prinzip der stabilen Ordnung: Zahlwortreihe in der richtigen Reihenfolge nutzen
- Abstraktionsprinzip: beliebige Objekte können gezählt werden. Art der Objekte, Anordnung, Sichtbarkeit, ... spielen keine Rolle

Vielfältige Abzählübungen unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades planen:

- geordnete/ungeordnete Objekte
- Abzählen mit/ohne Berühren
- anwesende/nicht anwesende Personen
- sichtbare/unsichtbare Gegenstände
- Herstellen von Mengen mit vorgegebener Anzahl

auch Erkundungen in der Klasse und im Schulhaus
weitergehende Fragen: Warum gibt es mehr Lehrkräfte als Schulklassen? ...

# Repräsentanten als Hilfsmittel beim Abzählen: Finger, Strichlisten – Bündeln


Quelle: Zahlenbuch 1, S. 20

Finger als Hilfsmittel beim Abzählen ist etwas anderes als

**Fingerrechnen**

- Fingerrechnen sollte als ein normales, meist schnell vorübergehendes Übergangsstadium im Grundschulalter angesehen werden,
- Fingerrechnen sollte nicht verboten oder ignoriert, sondern genau beobachtet und analysiert werden,
- Fingerrechner sollten behutsam zur verstärkten Nutzung anderer effektiverer Rechenstrategien geführt werden, z. B. durch ein verstärktes Anbieten von Strichlisten, Mengenbildern u. ä. m.

Zahlbegriff – komplexer Begriff
Kinder sollen Wissensnetz über Zahlen aufbauen, Zahlaspekte verbinden können

| | |
|---|---|
| Ordinaler Aspekt | Zählzahl: $1, 2, 3, \dots$<br>oder<br>Ordnungszahl (der wievielte?): der erste, der zweite, der dritte ... |
| Kardinaler Aspekt | Mächtigkeit von Mengen, Anzahl der Elemente (wie viele?) |
| Operatoraspekt | Vielfachheit einer Handlung/eines Vorgangs (wie oft?): einmal, zweimal, dreimal, ... |

| | |
|---|---|
| Maßaspekt | Maßzahlen für Größen (wie lang?, wie alt?, ...) : 10 cm, 4 Jahre |
| Rechenzahlaspekt | Algebraischer Aspekt: $\mathbb{N}$ mit Rechenoperationen als algebraische Struktur mit Gesetzen: $4 + 5 = 5 + 4$<br>Algorithmischer Aspekt: in Dezimaldarstellung Rechenoperationen mit Algorithmen ausführbar |
| Codierungsaspekt | Bezeichnung und Unterscheidung von Objekten: 030 20935830 |

## Bestimmen Sie die Zahlaspekte zu den unterstrichenen Angaben.

Familie Meier wohnt in der dritten Etage eines Mehrfamilienhauses. Zu ihrer Wohnung gehören fünf Zimmer. Das Wohnzimmer ist das größte Zimmer mit einer Länge von 5,80 m und einer Breite von 6,20 m. Jedes der zwei Kinder muss das Zimmer wöchentlich zwei Mal saugen.

Zur Familie Meier gehören fünf Personen. Das zweitgeborene Kind ist eine Tochter, das erste und das dritte Kind sind jeweils Söhne. Der kleinste Sohn ist zwar zwei Jahre jünger als die Tochter, jedoch 18 cm größer als sie. Er ist 1,87 m groß. Bei den Meiers gibt es also fünf Mal im Jahr ein Geburtstagsfest.

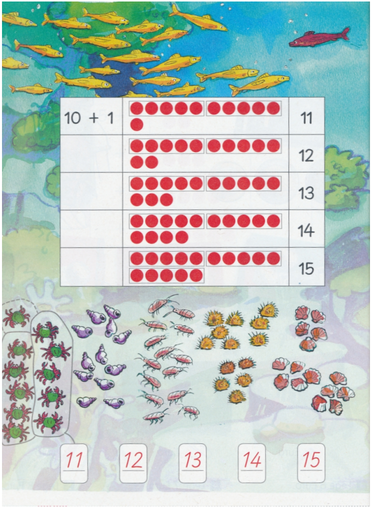
| Fragen | Beispiele | Zahlaspekt |
|---|---|---|
| | Sieben Zwerge | |
| | dreimal versuchen | |
| | dreimal so viel verdienen<br>das Dreifache verdienen | |
| | das fünfte Rad am Wagen<br>der 2. Tabellenplatz | |
| | 3,5 km<br>3,50 € | |
| | 602629<br>33098 PB | |
| | (56 + 78 =) 134 | |

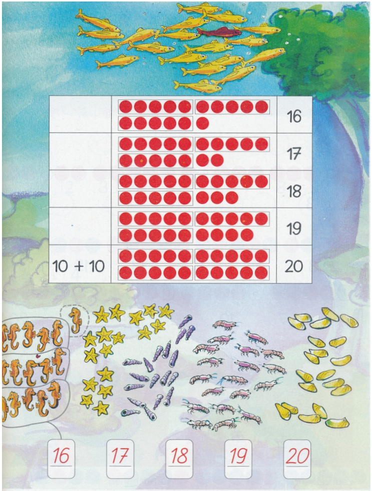
seit Mitte der 1990er Jahre vorherrschendes Konzept: ganzheitlicher Einstieg in den Zwanzigerraum



Quelle:Zahlenbuch 1, S. 6, 7

## Ganzheitlicher Ansatz und aktiv-entdeckendes und soziales Lernen




Quelle:Zahlenbuch 1, S. 26, 27

ganzheitlicher Ansatz folgt dem Konzept des aktiv-entdeckenden und sozialen Lernens:

Theoretische Basis:

- Lernen ist ein subjektiver und aktiv-konstruktiver Prozess des Lernenden.
  Kenntnisse und Fertigkeiten können nicht vermittelt/beigebracht werden, sondern das Kind muss sie selbst erwerben.

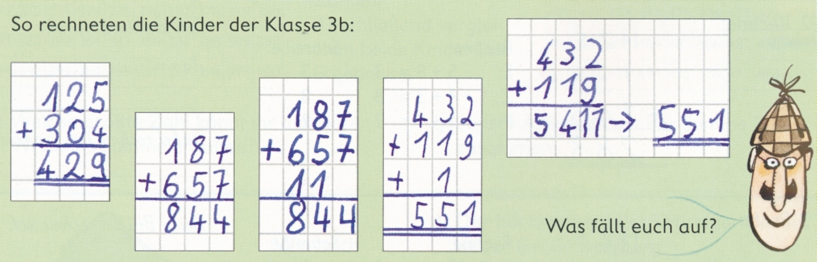
Außerdem: der aktive Zugang zum Lernen und der soziale Austausch während der Bearbeitung von Aufgaben gehören zum Wesen von Mathematik.

Allgemeine Merkmale des Konzepts aktiv-entdeckenden Lernens:

- Förderung der Eigenaktivität jedes Kindes
- ganzheitliche Erschließung größerer Stoffeinheiten
- Anknüpfen an und Nutzen von Vorkenntnisse der Kinder beim Erarbeiten neuer Themen,
- Freiräume für die Eigendynamik kindlicher Lernprozesse und die Realisierung einer natürlichen Differenzierung vom Kinde aus

  Beispiel: eigenständiges Erforschen von Rechenwegen durch die Kinder sowie durch das Vergleichen und Bewerten verschiedener Lösungswege und Notationen

## Ganzheitlicher Ansatz und aktiv-entdeckendes und soziales Lernen



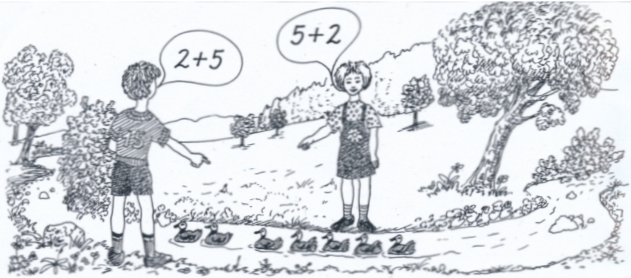

Quelle: Rechenwege 3, S. 55

- ständiges Verbinden inhaltlicher und allgemeiner Lernziele wie z. B. Argumentieren, Problemlösen
- veränderte Rolle des Lehrers, der zwischen den mathematischen Themen und den lernenden Kindern vermittelt, dabei Initiator, Begleiter und Helfender – im Sinne von Hilfe zur Selbsthilfe – ist,
- gründlich erprobte und vielseitig einsetzbare Lernmittel (wie z. B. das Zwanziger- und das Hunderterfeld, die $1+1$- und $1x1$-Tafel oder das Tausenderbuch im „Zahlenbuch“), die wesentliche mathematische Zusammenhänge adäquat veranschaulichen.

Vorteile aktiv-entdeckenden und sozialen Lernens

- SuS werden als Mitverantwortliche ihres Lernens verstanden,
- individuelles bzw. differenzierendes Lernen wird gefördert,
- Kinder lernen in Sinnzusammenhängen und können somit stabile Wissensnetze aufbauen,
- Kinder erwerben neue Erkenntnisse einsichtig,
- mit Schülerfehlern wird konstruktiv umgegangen.

## Ganzheitlicher Ansatz und aktiv-entdeckendes und soziales Lernen




○○○○●● 4 + 2 = □ ■■□□□□□ □ + □ = □

●●○○○○ 2 + 4 = □ □□□□□■■ □ + □ = □

① 5 + 1 = □
1 + 5 = □
4 + 3 = □
3 + 4 = □

② 7 + 1 = □
1 + 7 = □
8 + 1 = □
1 + 8 = □

③ 6 + 2 = □
2 + 6 = □
6 + 3 = □
3 + 6 = □

④ 8 + 2 = □
2 + 8 = □
7 + 2 = □
2 + 7 = □

(5)
$1+6=6+1=\square$
$2+5=5+2=\square$
$3+7=7+3=\square$
$1+8=8+1=\square$

(6)
$4+2+2=\square$
$2+4+2=\square$
$5+3+1=\square$
$3+5+1=\square$

(7)
$3+4+3=\square$
$2+8-3=\square$
$4+5-3=\square$
$1+9-2=\square$

(8)
$2+7+\square=10$
$4+4+\square=10$
$8+1-\square=5$
$7+2-\square=6$

(9)
$3+2+3=\square$
$10-2-3=\square$
$3+5+2=\square$
$8-3-1=\square$

(10)
$2+7-5=\square$
$4+3-2=\square$
$7+2-4=\square$
$1+6-2=\square$

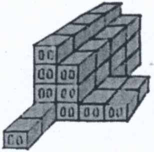
Quelle:E. Ch. Wittmann, G. N. Müller: Handbuch produktiver Rechenübungen. Klett: 1994

vormachen – nachmachen – kleinschrittig

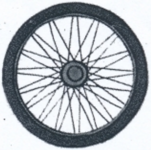

Sinnzusammenhang – aktiv-entdecken – keine Musterlösung – mehrere Wege möglich

## Ganzheitlicher Ansatz und aktiv-entdeckendes und soziales Lernen

**4** Wie viele Steine sind hier wohl aufgebaut? Man sieht nicht alle. Wie viele sind es mindestens?



**5** Zähle die Speichen. Ist es eine gerade oder ungerade Anzahl?



**6** Wie viele Speichen hat das Vorderrad deines Fahrrades? Ralf hatte am Hinterrad seines Fahrrades 36 Speichen, aber drei davon zerbrachen und fielen heraus.

**7** Setze fort:

$1 + 2 = 3$
$11 + 2 = 13$
$21 + 2 = 23$
$31 + 2 = \square$

**8** Setze fort:

10, 12, 14, 16, . . . , 30
11, 13, 15, 17, . . . , 31
5, 10, 15, 20, . . . , 55
10, 20, 30, 40, . . . , 100

**9** Gleich? Kleiner als? Größer als? (=, <, >)

| | | |
|---|---|---|
| 60 < 70 | 16 . . . 61 | 2 + 3 . . . 6 |
| 50 . . . 30 | 20 . . . 2 | 2 + 5 . . . 6 + 1 |
| 51 . . . 15 | 100 . . . 99 | 10 − 1 . . . 9 |
| 11 . . . 12 | 17 . . . 71 | 41 + 2 . . . 45 − 2 |

**10** Die Hälfte von 14 ist . . .
Die Hälfte von 20 ist . . .
Das Doppelte von 6 ist . . .
Das Doppelte von 11 ist . . .

Quelle: E. Ch. Wittmann, G. N. Müller: Handbuch produktiver Rechenübungen. Klett: 1994

Orientierung im Zahlenraum – Muster erkennen – rechnen