

Wie funktioniert das Rechnen mit dem Malkreuz?



15 · 60
rechne ich mit dem
Mal-Kreuz.

·	60	
10	600	
5	300	
	900	

a) Finde heraus, wie
Tim gerechnet hat!

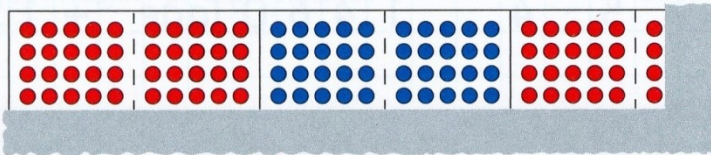


Käpnick (Hrsg.): Rechenwege 3, Volk und Wissen, 2012, S. 93

Welche Funktion hat das Tausenderfeld hier?

Zeige die folgenden Aufgaben am Tausenderfeld und berechne sie mit dem Malkreuz.

a) $4 \cdot 26$



·	20	6	
4	80	24	
			104

Müller, Wittmann: Zahlenbuch 4, Klett, 2013, S. 30

Halbschriftliche Multiplikation

- Schrittweise

•	10	5	
10	100	50	150
6	60	30	90
	160	80	240

$$\begin{array}{r} 5 \cdot 34 = 170 \\ 5 \cdot 30 = 150 \\ 5 \cdot 4 = 20 \end{array}$$

- Hilfsaufgabe

$$\begin{array}{r} 6 : 29 = 174 \\ \hline 6 \cdot 30 = 180 \\ 6 \cdot 1 = 6 \end{array}$$

- Tauschaufgabe
(verdoppeln/halbieren)

Halbschriftliche Division

- schrittweise
- Umkehraufgabe
- Hilfsaufgabe
- (halbieren)

3 Wie rechnet ihr $956 : 4$?



Beim Schulfest wurden 956 Euro eingenommen. Das Geld wird auf vier Jahrgänge aufgeteilt.

Janne	$956 : 4 = 239$
	$400 : 4 = 100$
R	556
	$400 : 4 = 100$
R	156
	$120 : 4 = 30$
R	36
	$36 : 4 = 9$
R	0

Maja	$956 : 4 = 239$
	$800 : 4 = 200$
R	156
	$120 : 4 = 30$
R	36
	$36 : 4 = 9$

Alexej	$956 : 4 = 239$
	$800 : 4 = 200$
	$100 : 4 = 25$
	$40 : 4 = 10$
	$16 : 4 = 4$

Fabian	
	$1000 : 4 = 250$
	$960 : 4 = 240$
	$956 : 4 = 239$

Lily	
	$956 : 2 = 478$
	$900 : 2 = 450$
	$56 : 2 = 28$
	$478 : 2 = 239$
	$400 : 2 = 200$
	$78 : 2 = 39$

Ich halbiere zweimal.



Wie rechnen die Kinder? Welche einfachen Aufgaben benutzen sie?
Vergleicht mit euren Rechenwegen.

$$\begin{array}{l} 1 \ 3 \ 3 : 7 = 19 \\ 70 : 7 = 10 \\ 35 : 7 = 5 \\ 28 : 7 = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1 \ 4 \ 5 : 5 = 30 - 7 = 29 \\ 150 : 5 = 30 \\ 5 : 5 = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{b) } 2 \ 5 \ 0 : 5 = \\ 5 \cdot 5 = 25 < 0 = 250 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{b) } 2 \ 5 \ 0 : 5 = 50 \\ 200 : 5 = 40 \\ 50 : 5 = 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{b) } 2 \ 5 \ 0 : 5 = 50 \\ 25 : 5 = 5 \\ 250 : 5 = 50 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{b) } 2 \ 5 \ 0 : 5 = 50 \\ 50 \cdot 5 = 250 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{a) } 7 \ 2 : 8 = 9 \\ 9 \cdot 8 = 72 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 8 \ 3 \ 6 : 4 = 209 \\ 400 : 4 = 100 \\ 436 : 4 = 109 \end{array}$$

Analysieren Sie die Lösungen der SuS.
Alles richtig. Notation egal.

a) 43·21

$$\begin{array}{r} 43 \cdot 21 = 867 \\ 40 \cdot 21 = 804 \\ 3 \cdot 21 = 63 \\ \hline 867 \end{array}$$

c) 43·21

$$\begin{array}{r} 43 \cdot 21 = 146 \\ 43 \cdot 21 = 83 \\ 3 \cdot 21 = 63 \end{array}$$

e) 12·19

$$\begin{array}{r} 12 \cdot 19 = 120 \\ 12 \cdot 1 = 12 \\ 12 \cdot 9 = 108 \end{array}$$

b) 9·56

$$\begin{array}{r} 9 \cdot 56 = 104 \\ 9 \cdot 50 = 450 \\ 9 \cdot 6 = 54 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 450 \\ + 54 \\ \hline 104 \end{array}$$

d) 9·56

$$\begin{array}{r} 5 \cdot 56 = 280 \\ 4 \cdot 56 = 224 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 280 \\ + 224 \\ \hline 504 \end{array}$$

f) 12·19

$$\begin{array}{r} 12 \cdot 19 = 118 \\ 10 \cdot 10 = 100 \\ 2 \cdot 4 = 18 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ + 18 \\ \hline 118 \end{array}$$

Fehler: Überschlag, Zahlvorstellungen, Zahldarstellung

Das operative Prinzip:

Objekte erfassen bedeutet zu erforschen, wie sie konstruiert sind und wie sie sich verhalten, wenn auf sie Operationen (Transformationen, Handlungen, ...) ausgeübt werden.

Was ist ein Rechenquadrat mit Ohren? – Die Sachstruktur

Das Format *Rechenquadrat* (Abb. 2) basiert auf den folgenden Regeln:

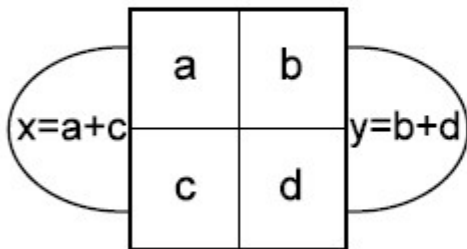


Abb. 2: Übungsformat
„Rechenquadrat mit äußeren
Zahlen“ in allgemeiner Darstellung

Der Zusammenhang zwischen den Basiszahlen (Innere Zahlen):

Die Summen der Basiszahlen jeder Zeile müssen identisch sein.

$$a+b=c+d$$

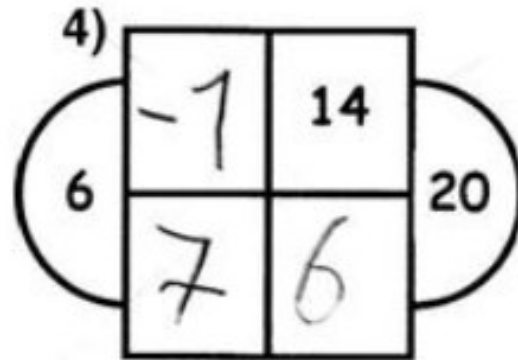
Der Zusammenhang zwischen den Basiszahlen und den äußeren Zahlen: Die Summe der Basiszahlen einer Spalte wird als Ergebnis in das anliegende äußere Zahlenfeld – im Sprachjargon der Kinder:

„... in das anliegende äußere Ohr“ – eingetragen.

$$x=a+c \text{ und } y=b+d$$

Das operative Prinzip:

Objekte erfassen bedeutet zu erforschen, wie sie konstruiert sind und wie sie sich verhalten, wenn auf sie Operationen (Transformationen, Handlungen, ...) ausgeübt werden.



Henrik (3. Klasse) macht es
„passend“

Das operative Prinzip:

Objekte erfassen bedeutet zu erforschen, wie sie konstruiert sind und wie sie sich verhalten, wenn auf sie Operationen (Transformationen, Handlungen, ...) ausgeübt werden.

Rechne aus. Setze fort.

$$\begin{array}{l} 2 + (1 + 8) = \underline{11} \\ 2 + (3 + 8) = \underline{13} \\ 2 + (5 + 8) = \underline{15} \\ 2 + (7 + 8) = \underline{17} \\ 2 + (9 + 8) = \underline{19} \end{array}$$

Beschreibe: Was fällt dir auf?

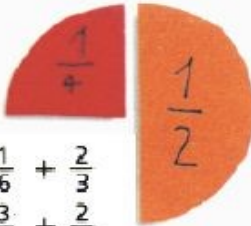
*Begründe: Warum ist das so?

die erste zahl wird immer um zwei größer, die 2 zahl bleibt gleich, so wird das ergebnis auch immer um 2 größer.

das ergebnis wird um 2 größer weil $2+0=2$ ist.



Die 4 Übungstypen

Die vier Übungstypen	Unstrukturiert	Strukturiert
	... ➔	
Gestützt		$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$  a. $\frac{1}{6} + \frac{2}{3}$ $\frac{3}{6} + \frac{2}{3}$ $\frac{5}{6} + \frac{2}{3}$... ⬇
Formal	$\frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ $\frac{1}{12} - \frac{1}{15}$ ← ...	e. $\frac{5}{20} m =$ $\frac{10}{20} m =$ $\frac{15}{20} m =$ $\frac{20}{20} m =$ $\frac{25}{20} m =$ $\frac{30}{20} m =$... ⬇

Kommentieren Sie die vier Typen!

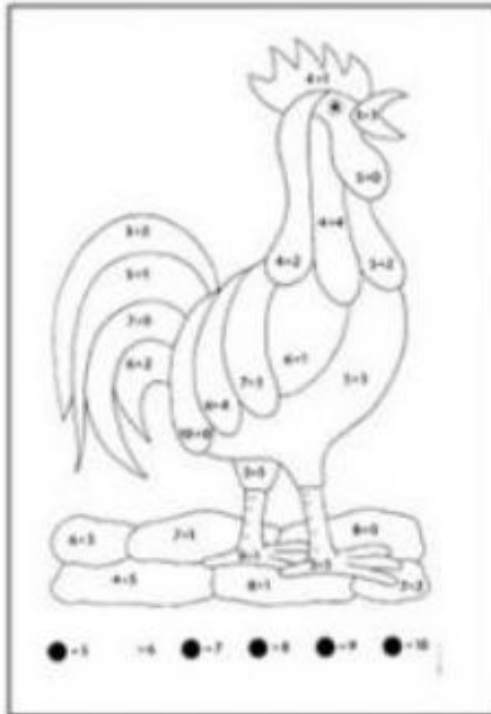
Strukturierung/ Darstellungsform	unstrukturiert	strukturiert
gestützt	Aufgaben willkürlich ausgewählt. Jede Aufgabe wird für sich betrachtet, gelöst und kontrolliert. Bearbeitung kann sich auf Material und Handlungen damit stützen.	Aufgaben durch ganzheitlichen Strukturzusammenhang aufeinander bezogen. Lösungswege und Ergebnisse der einzelnen Aufgaben stehen in einem Zusammenhang und unterstützen sich gegenseitig. Bearbeitung kann sich auf Material und Handlungen damit stützen.
formal	Aufgaben willkürlich ausgewählt. Jede Aufgabe wird für sich betrachtet, gelöst und kontrolliert. Aufgaben werden auf der rein symbolischen Ebene bearbeitet.	Aufgaben durch ganzheitlichen Strukturzusammenhang aufeinander bezogen. Aufgaben werden auf der rein symbolischen Ebene bearbeitet.

Wittmann, E. Ch. (1992). Üben im Lernprozess. In E. Ch. Wittmann & G. N. Müller (Hrsg.), *Handbuch produktiver Rechenübungen, Bd. 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen* (S. 175-182). Stuttgart: Ernst Klett Schulbuchverlag.

So lange *gestütztes Üben* wie individuell nötig, so oft *strukturiertes Üben* wie möglich!
Mathematik ist die Wissenschaft von den Mustern und Strukturen.

Was ist was?

Der bunte Hahn:



Male die Felder so aus, wie es die Farbe des jeweiligen Ergebnisses vorgibt!

Rechne aus!



Benutze den Rechenrahmen!

Was fällt dir auf?

$$7+6= \quad 6+7= \quad 5+8= \quad 4+9=$$

Rechne aus!



Benutze die Rechenkette!

$$7+6= \quad 1+5= \quad 3+4= \quad 8+2=$$

Zahlenketten:

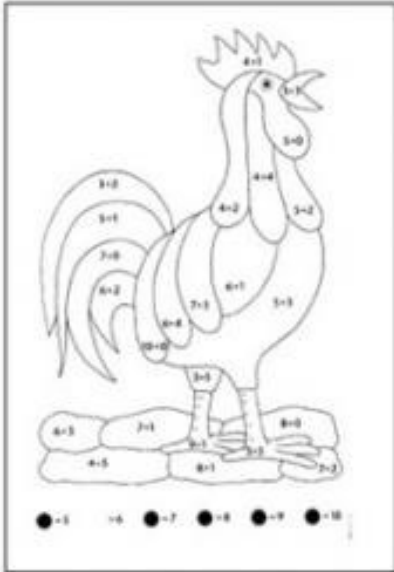
Wähle zwei Startzahlen und rechne sie zusammen. Das Ergebnis schreibe rechts daneben. Rechne dann die zweite und die dritte Zahl zusammen. Das Resultat schreibe als Zielzahl rechts neben die dritte Zahl, zum Beispiel:

2	10	12	22
---	----	----	----

bzw.

8	4	12	16
---	---	----	----

Finde (alle) Startzahl-Pärchen, mit denen du die Zielzahl 20 erreichen kannst.

Strukturierungsgrad		schwach strukturiertes									
Darstellungsform		unstrukturiertes	Üben → strukturiertes								
gestütztes Üben		Rechne aus!:  Benutze die Rechenkette! 7+6= 1+5= 3+4= 8+2=	Rechne aus!:  Benutze den Rechenrahmen! Was fällt dir auf? 7+6= 6+7= 5+8= 4+9=								
formales Üben		Der bunte Hahn:  Male die Felder so aus, wie es die Farbe des jeweiligen Ergebnisses vorgibt!	Zahlenketten: Wähle zwei Startzahlen und rechne sie zusammen. Das Ergebnis schreibe rechts daneben. Rechne dann die zweite und die dritte Zahl zusammen. Das Resultat schreibe als Zielzahl rechts neben die dritte Zahl, zum Beispiel: <table><tr><td>2</td><td>10</td><td>12</td><td>22</td></tr></table> bzw. <table><tr><td>8</td><td>4</td><td>12</td><td>16</td></tr></table> Finde (alle) Startzahl-Pärchen, mit denen du die Zielzahl 20 erreichen kannst.	2	10	12	22	8	4	12	16
2	10	12	22								
8	4	12	16								

Arten strukturierter Übungen

Art der Struktur/ Zugang zur Struktur	Problemstrukturiert	Operativ strukturiert	sachstrukturiert
reflektives Üben	Gleichartige Aufgaben im Umkreis eines Problems. Dies tritt erst zutage, nachdem eine Reihe von Aufgaben gelöst wurde.	Gleichartige Aufgaben im Umkreis eines operativen Zusammenhangs. Dieser tritt erst zutage, nachdem eine Reihe von Aufgaben gelöst wurde.	Gleichartige Aufgaben im Umkreis eines Sachzusammenhangs. Dieser wird im nachhinein analysiert/dargestellt.
immanentes Üben	Strukturzusammenhang in Form einer übergeordneten Zielsetzung wird bereits am Beginn der Übung benutzt.		Gleichartige Aufgaben im Umkreis eines Sachzusammenhangs. Daten werden diesem entnommen und Ergebnisse in der Sachsituation interpretiert.

Wittmann, E. Ch. (1992). Üben im Lernprozess. In: E. Ch. Wittmann & G. N. Müller (Hrsg.), *Handbuch produktiver Rechenübungen, Bd. 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen* (S. 175-182). Stuttgart: Ernst Klett Schulbuchverlag.

Arten strukturierter Übungen

Art der Struktur/ Zugang zur Struktur	Problemstrukturiert	Operativ strukturiert	sachstrukturiert
reflektives Üben	Rechendreiecke von außen nach innen	Rechne aus! Setze fort! Was fällt dir auf? Warum ist das so? $25 + 15 =$ $24 + 16 =$ $23 + 17 =$ $22 + 18 =$ $21 + 19 =$ $\dots\dots\dots =$ $\dots\dots\dots =$	Fahrpläne Zahlenbuch 4, S. 124
immanentes Üben	Finde weitere Zauberquadrate		Tageslängen Zahlenbuch 3, S. 120

Wittmann, E. Ch. (1992). Üben im Lernprozess. In E. Ch. Wittmann & G. N. Müller (Hrsg.), *Handbuch produktiver Rechenübungen, Bd. 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen* (S. 175-182). Stuttgart: Ernst Klett Schulbuchverlag.

2. Rechne aus. Setze fort.

$$80 - 50 = 30$$

$$79 - 51 = 28$$

$$78 - 52 = 26$$

$$77 - 53 = 24$$

$$76 - 54 = 22$$

$$75 - 55 = 20$$

$$74 - 56 = 18$$

a) Beschreibe: Was fällt dir auf?

Das Ergebnis wird immer
2 kleiner

b) Begründe: Warum ist das so?

vorn ist es immer
1 kleiner und hinten
ist es immer 1 mehr

<https://kira.dzlm.de/>

operativ strukturiert, reflektiv

Schreib 1 bis 9
in Dreierreih'n.

1	2	3	
4	5	6	
7	8	9	24
			15

Tausch 7 und 3,
was ist dabei?

1	2	7	
4	5	6	
3	8	9	
		22	

Die 5 lass steh'n,
die andern dreh'n.

4	1	2	
3	5	7	
8	9	6	23

Nun finde zwei,
vertausche sie,
dann wirst du reich,
hast alles gleich.

120

■ Übungsformat „Zahlenquadrate“ als Spezialfall des Formates „Plusquadrate“. Die Geschichte von der Wunderschildkröte Lo Shu erzählen. 1 Die Wendekarten von 1 bis 9 nach Anweisung des Zauberers legen. Jeweils die acht Aufgaben ausrechnen.

Müller, Wittmann: Zahlenbuch 1, Klett, 2012, S. 120

Problemstrukturiert, reflektiv

1 Wie lange ist es hell?

Datum	Sonnen- aufgang	Sonnen- untergang
21. Januar	8.25 Uhr	17.02 Uhr
21. Februar	7.34 Uhr	17.57 Uhr
21. März	6.33 Uhr	18.46 Uhr
21. April	6.24 Uhr	20.38 Uhr
21. Mai	5.32 Uhr	21.25 Uhr
21. Juni	5.15 Uhr	21.53 Uhr
21. Juli	5.40 Uhr	21.37 Uhr
21. August	6.27 Uhr	20.43 Uhr
21. September	7.16 Uhr	19.34 Uhr
21. Oktober	8.06 Uhr	18.27 Uhr
21. November	8.00 Uhr	16.36 Uhr
21. Dezember	8.35 Uhr	16.25 Uhr

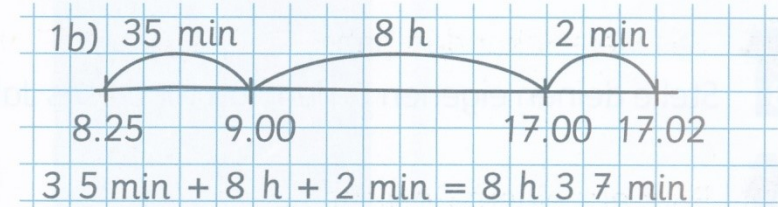
Die Daten gelten für die Stadt Essen.

a) An welchem Datum geht die Sonne am frühesten auf? Wann am spätesten?

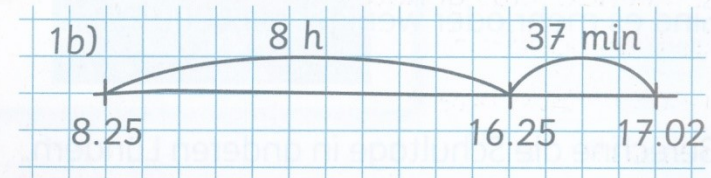
b) Berechne die Tageslängen.

Gib diese **Zeitspannen** in h und min an.

Florina rechnet: 21. Januar



Julian rechnet: 21. Januar



c) Wann ist es am längsten hell?

sachstrukturiert, immanent

Eine Aufgabe: Streichquadrate ein Ergebnis - viele Beziehungen

Kern: Die Erkundung mathematischer Beziehungen

+	17	12	31
45	62	57	76
19	36	31	50
8	25	20	39

$$62 + 50 + 20 = 132$$

62	57	76
36	31	50
25	20	39

$$76 + 36 + 20 = 132$$

Warum kommt immer
das Gleiche heraus?

„Streichregel“

1. Kreise eine der Zahlen ein und streiche alle Zahlen in der selben Zeile & Spalte
2. Fahre so fort, bis alle Zahlen eingekreist oder gestrichen sind
3. Addiere die eingekreisten Zahlen

Problemstrukturiert, reflektiv

Begründen Sie das Normalverfahren der schriftlichen Multiplikation am Beispiel der Aufgabe $36 \cdot 78$ und benennen Sie die benutzten Rechengesetze!

Padberg schlägt eine Stufenfolge nach dem Prinzip des fortschreitenden Schwierigkeitsgrades vor:

3. Multiplikation mit gemischten zwei- und mehrstelligen Multiplikatoren

$$347 \cdot 253 = 347 \cdot (200 + 50 + 3) \\ = 347 \cdot 200 + 347 \cdot 50 + 347 \cdot 3$$

oder

$$\begin{array}{r} 347 \cdot 253 = \\ \hline 347 \cdot 200 = 69400 \\ 347 \cdot 50 = 17350 \\ 347 \cdot 3 = 1041 \\ \hline 347 \cdot 253 = 87791 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 347 \cdot 253 = \\ \hline \begin{array}{r} \underline{347 \cdot 200} \quad \underline{347 \cdot 50} \quad \underline{347 \cdot 3} \\ 69400 \quad 17350 \quad 1041 \end{array} \quad \begin{array}{r} 69400 \\ + 17350 \\ + 1041 \\ \hline 87791 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \underline{347 \cdot 253} \\ \text{das 200-fache} \quad 69400 \\ \text{das 50-fache} \quad 17350 \\ \text{das 3-fache} \quad \underline{1041} \\ 87791 \end{array}$$

Padberg schlägt eine Stufenfolge nach dem Prinzip des fortschreitenden Schwierigkeitsgrades vor:

3. Multiplikation mit gemischten zwei- und mehrstelligen Multiplikatoren

$\begin{array}{r} 347 \cdot 253 \\ \hline 69400 \\ 17350 \\ 1041 \\ \hline 87791 \end{array}$	$\rightarrow$	$\begin{array}{r} 347 \cdot 253 \\ \hline 694 \\ 1735 \\ 1041 \\ \hline 87791 \end{array}$
	Nicht zu schnell!	Normierte Endform

Erläutern Sie am nebenstehenden
Beispiel das Verfahren der schriftlichen
Division!

<i>H</i>	<i>Z</i>	<i>E</i>	: 3 =	<i>H</i>	<i>Z</i>	<i>E</i>
7	0	8		2	3	6
6						
1	0					
	9					
	1	8				
	1	8				
		0				

<i>T</i>	<i>H</i>	<i>Z</i>	<i>E</i>	: 4 =	<i>T</i>	<i>H</i>	<i>Z</i>	<i>E</i>
1	5	1	2		—	3	7	8
1	2							
	3	1						
	2	8						
		3	2					
		3	2					
			0					

a) $936 : 4 = 234$

$$\begin{array}{r}
 8 \\
 \hline
 13 \\
 \hline
 12 \\
 \hline
 16 \\
 \hline
 16 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Josefs Lösung

Überschlagsrechnung: $960:4 = 240$

4 passt in die 9 zwei Mal

(Ermitteln des ersten Teildividenten und Schätzen der ersten Quotientenziffer)

2 mal 4 gleich 8

(Multiplikation)

9 minus 8 gleich 1

(Subtraktion)

3 herunterholen

(Herunterholen der nächsten Ziffer)

Diese Schritte werden immer wieder durchlaufen bis alle Ziffern des Dividenten einmal heruntergeholt worden sind.

<https://kira.dzlm.de/>

Für natürliche Zahlen gilt:

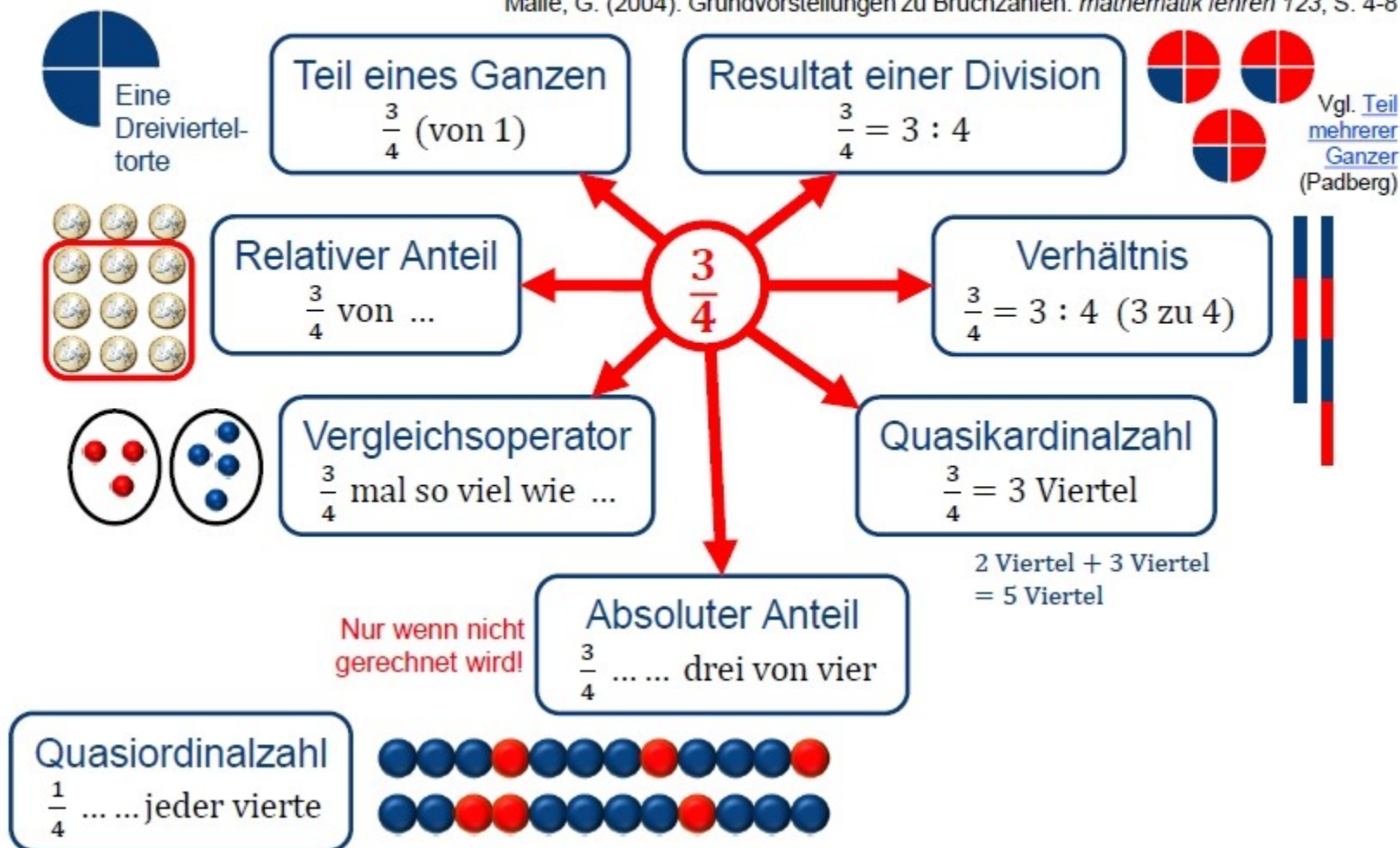
1. Eineindeutigkeit zwischen Zahl und Zahlzeichen: Jede Zahl hat genau eine Zahlbezeichnung.
2. Diskrete Ordnung: Jede Zahl hat einen Nachfolger und – außer der kleinsten Zahl – einen Vorgänger. Die Menge der Zahlen ist wie eine Kette mit Anfang, aber ohne Ende.
3. Wenn die Division möglich (und der Teiler größer als 1) ist, dann ist das Ergebnis immer kleiner als die geteilte Zahl.
4. Multiplikation und Ordnung: Multipliziert man zwei Zahlen, die größer als 1 sind, so ist das Ergebnis größer als jede der beiden Zahlen.

Untersuchen Sie diese Aussagen im Bereich der Bruchzahlen.

„Brüche“ bei den Brüchen durch Aufbau tragfähiger Grundvorstellungen vermeiden und nicht unter den Teppich kehren.

Was bedeutet $\frac{3}{4}$?

Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *mathematik lehren* 123, S. 4-8



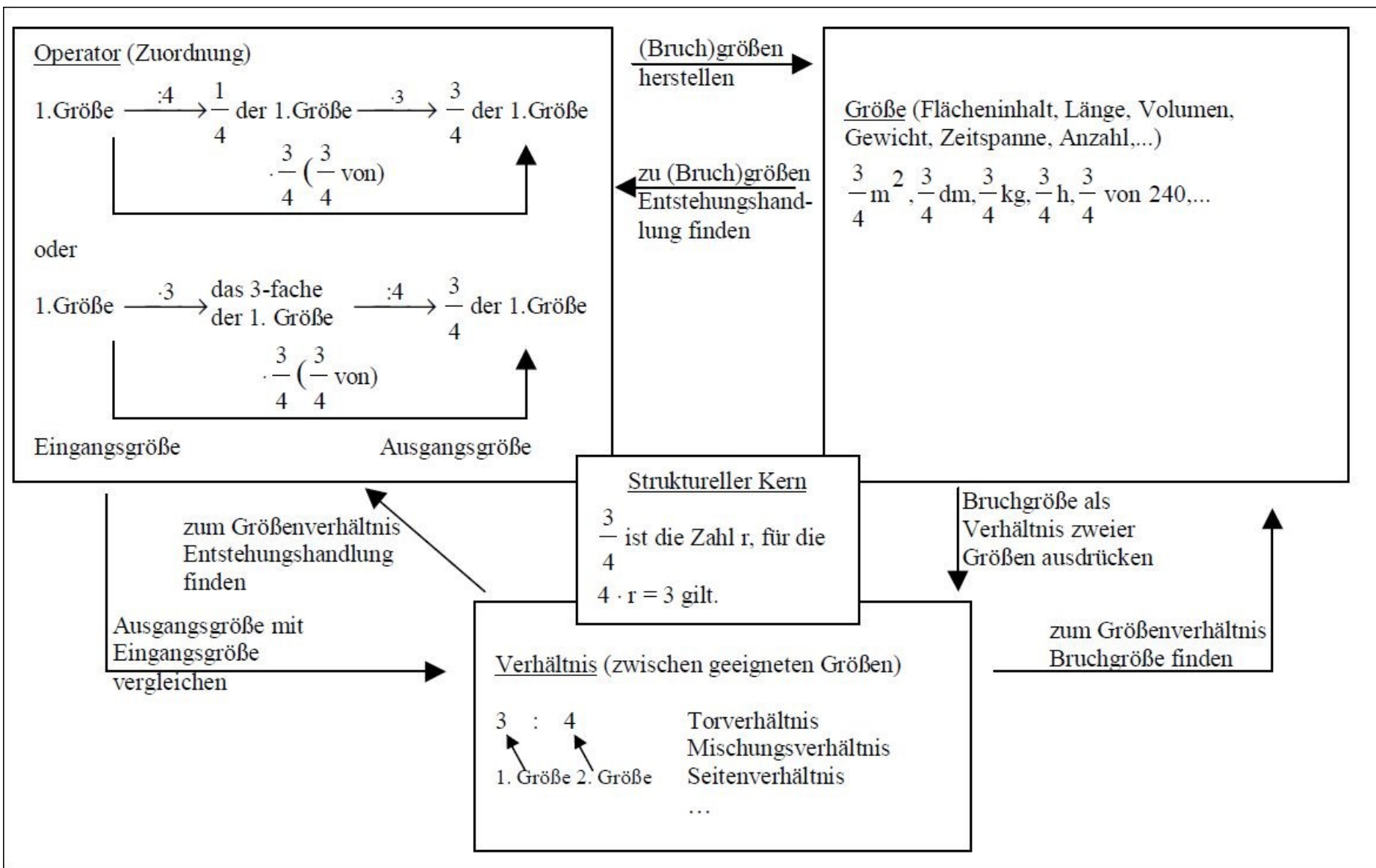
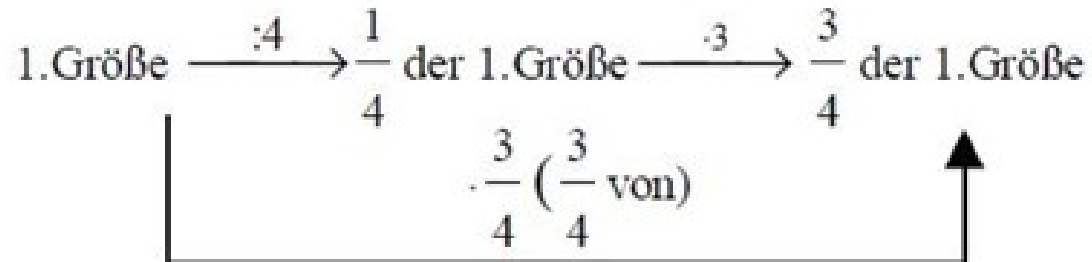
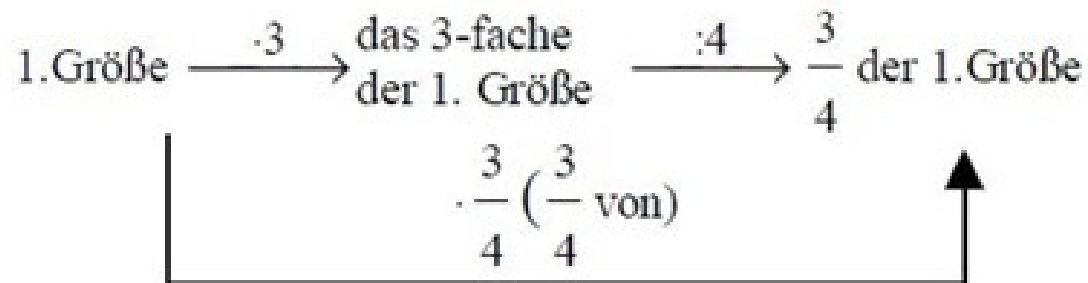


Abbildung 8: Drei wichtige Deutungen von Bruchzahlen am Beispiel $\frac{3}{4}$

Operator (Zuordnung)



oder

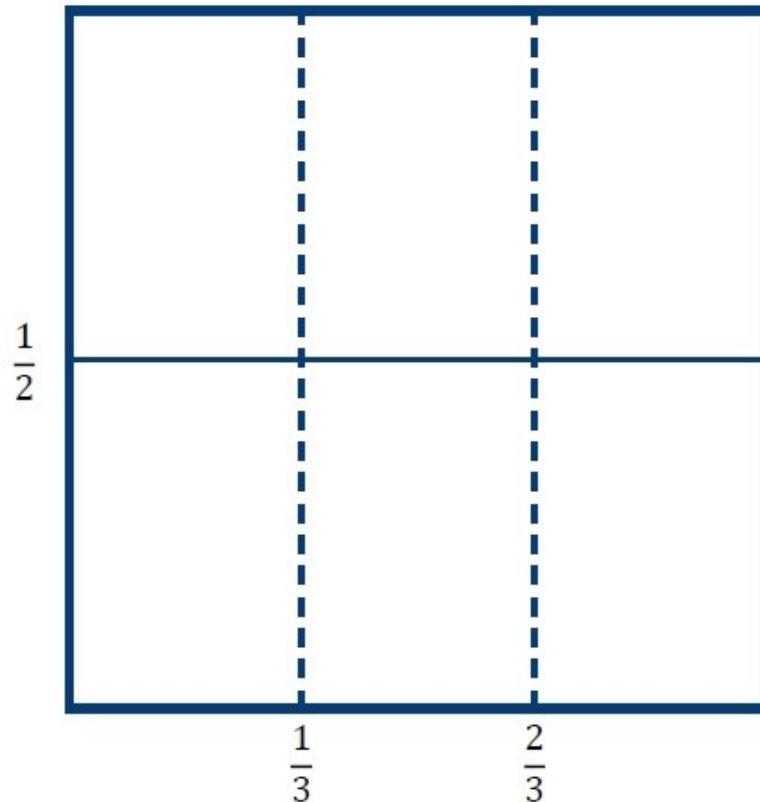


Eingangsgröße

Ausgangsgröße

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ bedeutet $\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{3}$.

Hefendehl-Hebeker, L. (1996): Brüche haben viele Gesichter. *mathematik lehren* 78, S. 20-22, 47-48



- ▶ Jede „Fliese“ hat die Seitenlängen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ und ihre Fläche ist $\frac{1}{6}$ der Gesamtfläche.

$\frac{1}{6}$ ist außerdem

- ▶ die Hälfte von einem Drittelstreifen,
- ▶ ein Drittel von einer Quadrathälfte,
- ▶ das Ergebnis der formalen Rechnung $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$.

Motivieren Sie an diesem Bild die Regel zur Multiplikation von Brüchen.

Grundvorstellungen zur Division von Brüchen

- Umkehroperation zur Multiplikation
- Division als Aufteilen bzw. Ausmessen

Formulieren Sie je ein Beispiel.

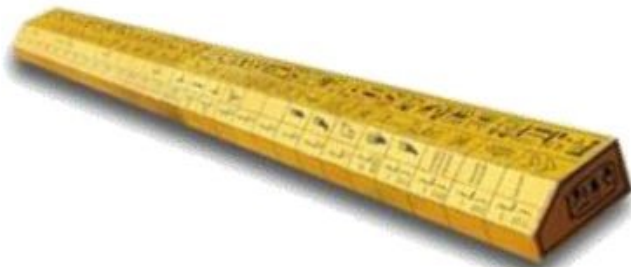
Division von Bruchzahlen

$$\frac{4}{9} : 2$$

$$\frac{7}{2} : \frac{7}{10}$$

Teilen
(Verteilen)

Messen
(Aufteilen)



► Maß kleiner als die zu messende Größe.

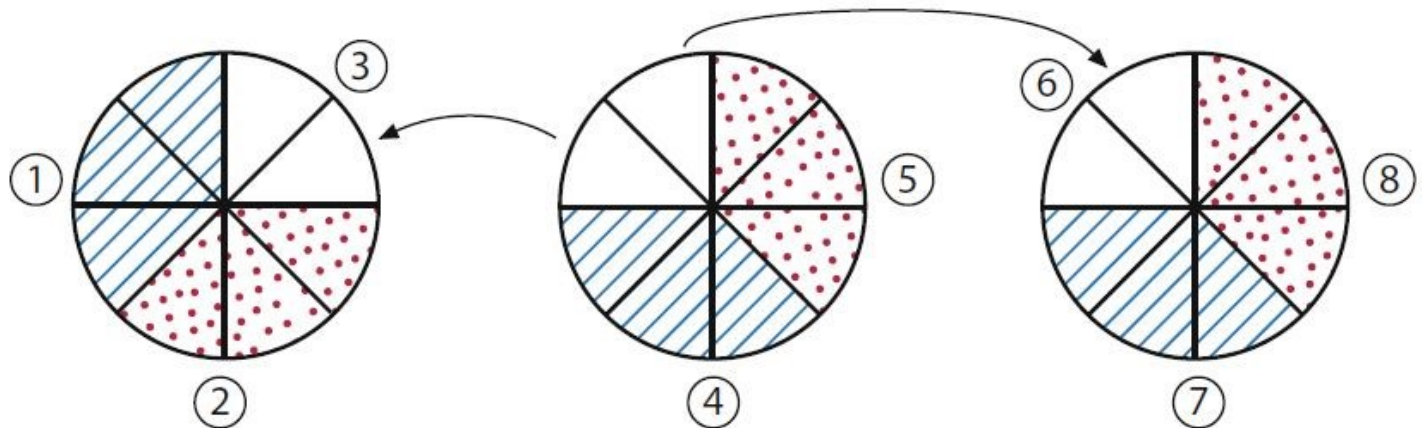
- ▷ Beispiel: $\frac{3}{4} : \frac{1}{4}$
- ▷ Zugehörige Frage:
Wie oft ist $\frac{1}{4}$ in $\frac{3}{4}$ enthalten?

► Maß größer als die zu messende Größe.

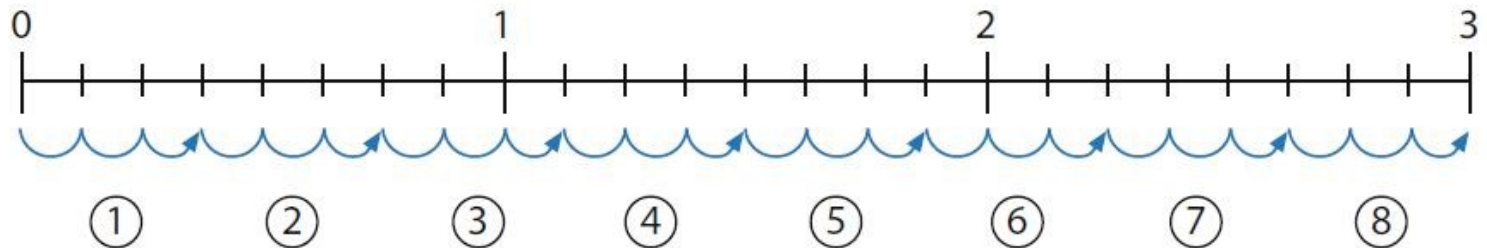
- ▷ Beispiel: $\frac{1}{4} : \frac{3}{4}$
- ▷ Zugehörige Frage:
Welcher Bruchteil
von $\frac{3}{4}$ passt in $\frac{1}{4}$?

$3 : \frac{3}{8}$, gestellt in Form einer Textaufgabe

Anja



Bernd



Padberg, F.; Wartha, S. (2017): Didaktik der Bruchrechnung, Springer, S. 131

Erläutern Sie die Lösungen von Anja und Bernd.