# Haus der Vierecke

Dr. Elke Warmuth

Sommersemester 2018

Konvexes Viereck

Trapez

Drachenviereck

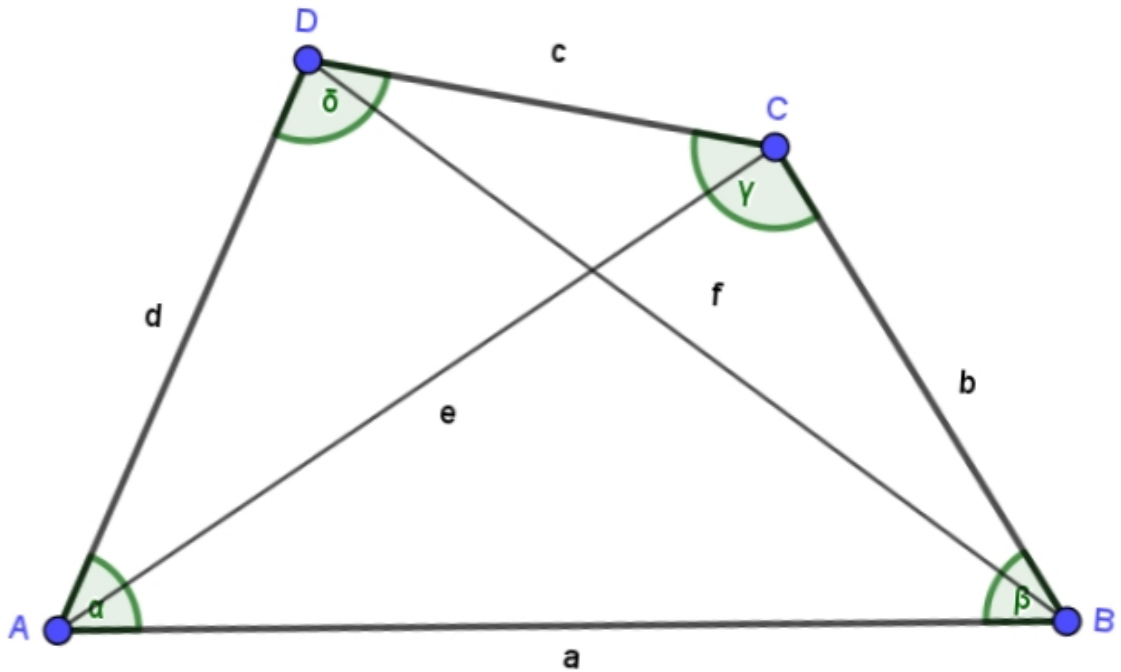
Parallelogramm
- Rhombus
- Rechteck

Sehnenviereck

Tangentenviereck

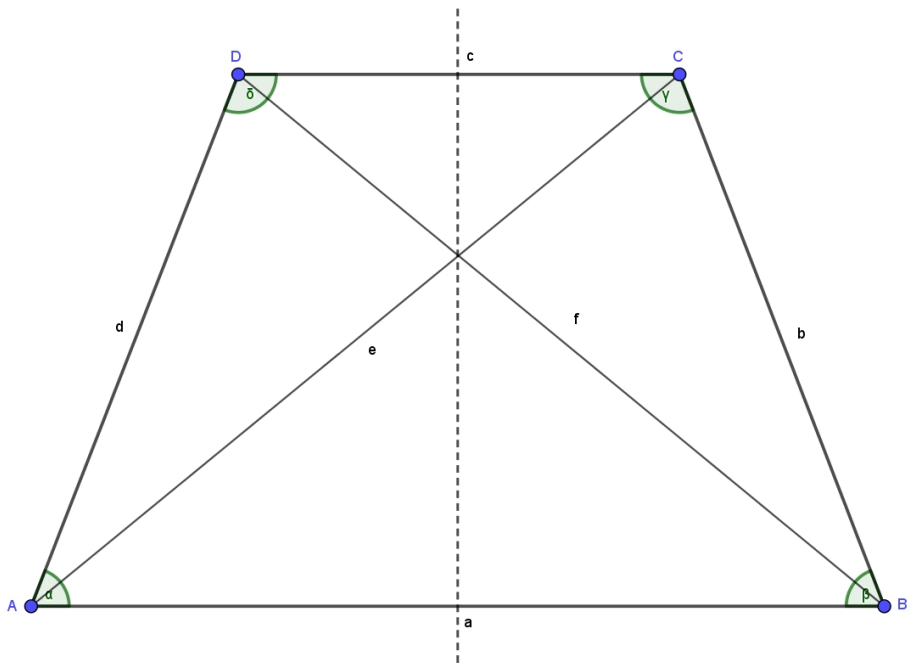
Überraschung?

Wir betrachten nur konvexe Vierecke:




- Innenwinkelsumme $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$.
- Zwei Diagonalen $e$ und $f$.

Achsensymmetrisches Viereck mit der Mittelsenkrechten einer Seite als Symmetrieachse:

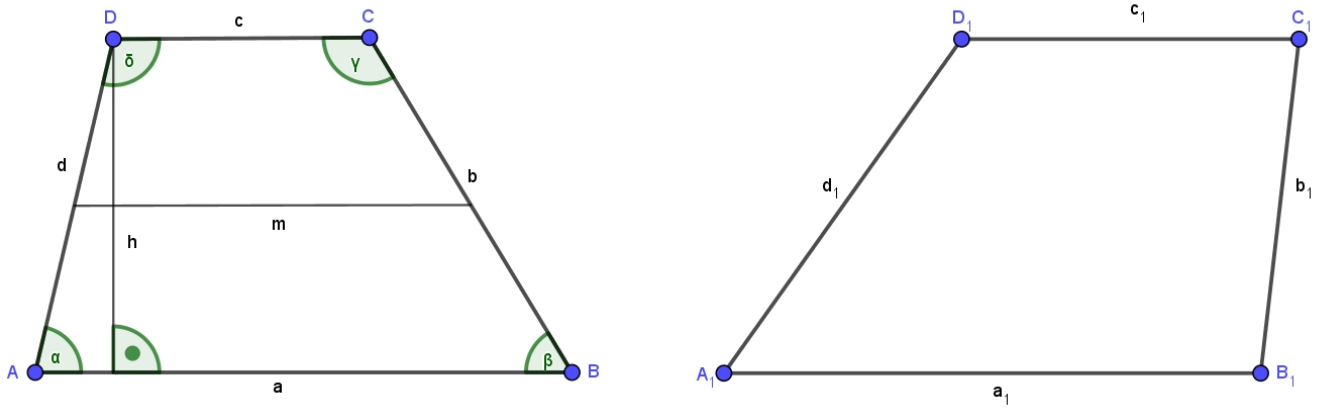



Eigenschaften:

- $AB \| CD$
- $b = d$
- $e = f$.
- $\alpha = \beta, \gamma = \delta$
- $\alpha + \delta = 180°, \beta + \gamma = 180°$
- Die Diagonalen schneiden sich auf der Symmetrieachse. Warum?

## Definition

Ein Viereck mit zwei zueinander parallelen Seiten heißt Trapez.




Bezeichnungen und Eigenschaften

- Grundseiten $a, c$ mit $a \| c$, $a$ ist die längere Seite.
- Schenkel $b, d$
- Die Höhe $h$ steht senkrecht auf $a$ und auf $c$.

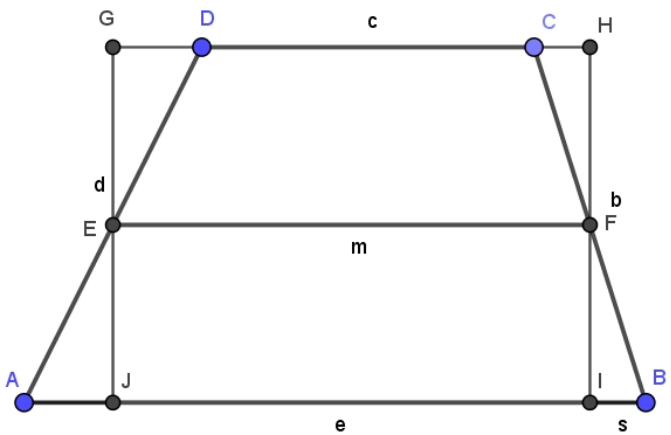
## Satz

*In Trapez gilt:*

- $\alpha + \delta = 180°, \beta + \gamma = 180°$.
- *Die Mittellinie ist die Mittelparallele zu den beiden Grundseiten.*

## Beweis.

1. *Übungsaufgabe*
2. *Zeichne Senkrechte zu den Grundseiten durch $E$ und $F$. Zeige mit Kongruenzsätzen, dass $|EG| = |EJ|$ und $|FH| = |FI|$.*



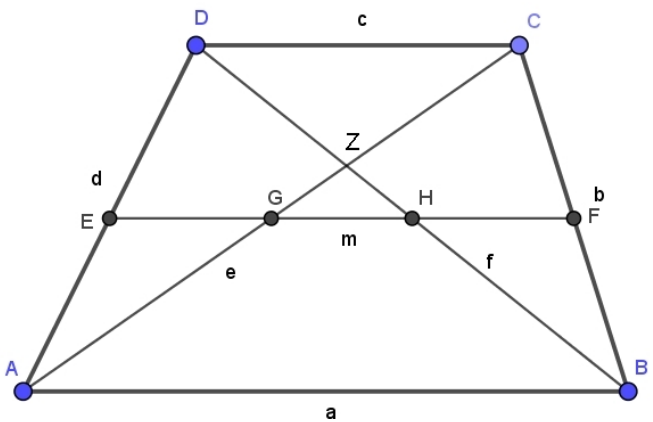
## Satz

*In Trapez gilt:*

- $m = \frac{a+c}{2}, |GH| = \frac{a-c}{2}$
- *Die Mittellinie verläuft durch die Mittelpunkte der Diagonalen.*
- *Die Diagonalen schneiden einander im gleichen Verhältnis, nämlich wie $c : a$.*

## Beweis.

1. $|EG| = |HF| = \frac{c}{2}, |GF| = \frac{a}{2}$
2. Übungsaufgabe
3. Beweis mit Strahlensatz. Kommt später.



Spezielle Trapeze:

- gleichschenkliges Trapez: achsensymmetrisch
  Eigenschaften siehe achsensymmetrisches Viereck mit einer Mittelsenkrechten als Symmetrieachse
- rechtwinkliges Trapez: ein rechter Winkel
- Parallelogramm: zwei Paar paralleler Seiten
- Rhombus: zwei Paar paralleler und gleich langer Seiten
- Rechteck: zwei rechte Winkel
- Quadrat: zwei rechte Winkel und gleich lange Seiten

Keine Trapeze:

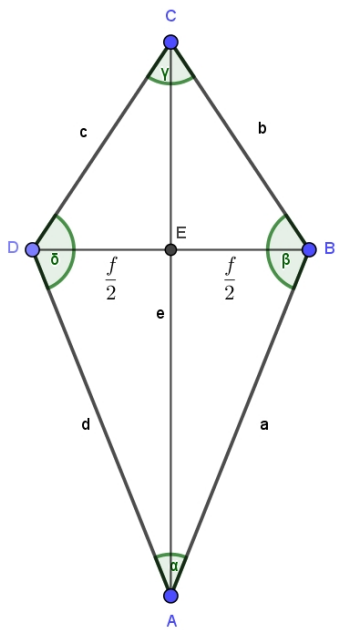
- allgemeines Drachenviereck

## Definition

Ein Drachenviereck ist ein Viereck, bei dem eine Diagonale Symmetrieachse ist, oder (äquivalent) das zwei *disjunkte* Paare gleich langer benachbarter Seiten besitzt.

## Aufgabe

*Warum sind diese beiden Definitionen äquivalent?*

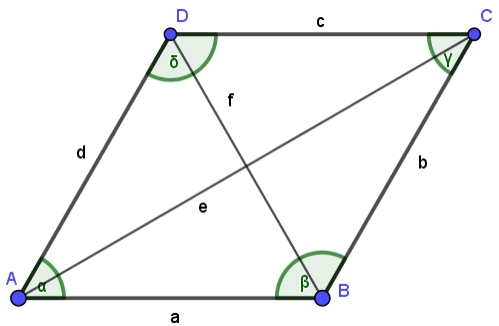



Eigenschaften:

- $c = b, d = a$
- $\beta = \delta$
- $AC \perp DB$.
- $AC$ halbiert $\alpha$ und $\gamma$.
- $E$ halbiert $DB$.

Spezielle Drachenvierecke:

- Rhombus: vier gleich lange Seiten




- Quadrat: vier gleich lange Seiten und vier gleich große Winkel

Keine Drachenvierecke:

- allgemeines Trapez
- Parallelogramm
- allgemeines Rechteck

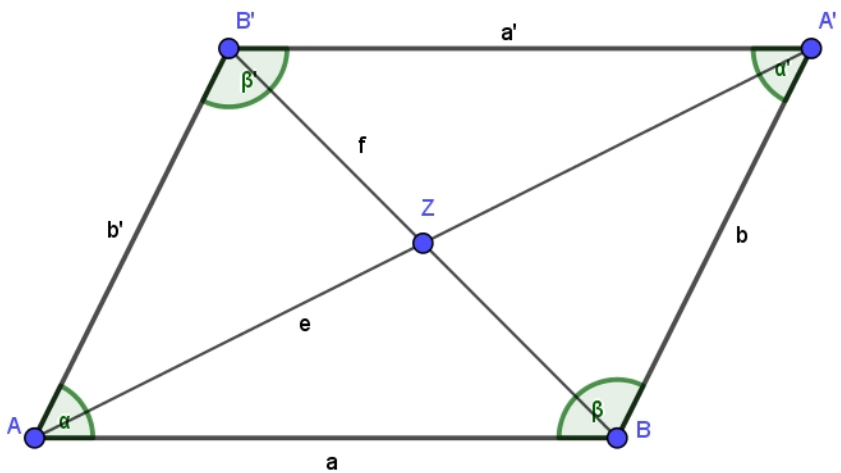
Punktspiegelung am Zentrum $Z$

- Abbildung der Ebene auf sich
- Für jeden Punkt $P$ zeichne Strecke von $P$ nach $Z$ , verdopple die Strecke $PZ$ und erhalte als Endpunkt den Bildpunkt $P'$.
- Es gilt $Z' = Z$.
- In der Ebene ist die Punktspiegelung am Zentrum $Z$ gleichbedeutend mit einer Drehung um $180^\circ$ um das Drehzentrum $Z$.
- Eine Figur, die bei Punktspiegelung in sich übergeht, heißt punktsymmetrisch.

## Aufgabe

- *F: Zeichnen Sie ein beliebiges Dreieck, wählen Sie eine Ecke als Zentrum $Z$ und spiegeln Sie das Dreieck an $Z$.*
- *M: Zeichnen Sie ein beliebiges Dreieck, wählen Sie eine Ecke als Zentrum $Z$ und drehen Sie das Dreieck um $180^\circ$ um $Z$.*

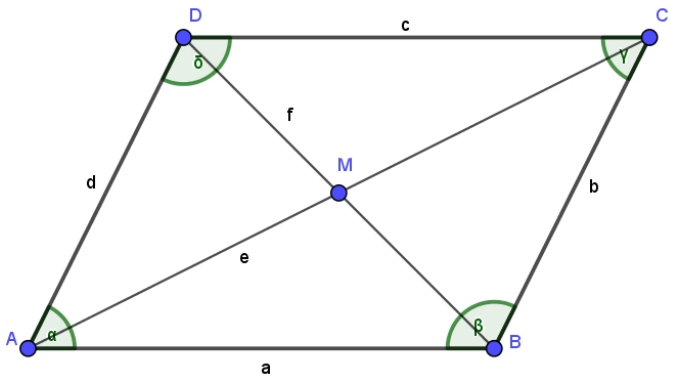
Punktsymmetrisches Viereck mit dem Diagonalenschnittpunkt als Symmetriezentrum:




Eigenschaften:

- $a = a', b = b'$
- $\alpha = \alpha', \beta = \beta'$
- $\alpha + \beta = 180°$
- $|AZ| = |A'Z|, |BZ| = |B'Z|$
- $AB \| A'B', AB' \| BA'|$

## Definition




Ein Viereck, bei dem je zwei Gegenseiten zueinander parallel sind, heißt Parallelogramm.

## Satz

*Jedes Parallelogramm ist punktsymmetrisch mit M als Symmetriezentrum.*

## Beweis.

- $\triangle ABC \cong \triangle CDA \Rightarrow a = c, b = d \Rightarrow \triangle ABM \cong \triangle CDM$
- $\Rightarrow |AM| = |MC|, |BM| = |MD|.$

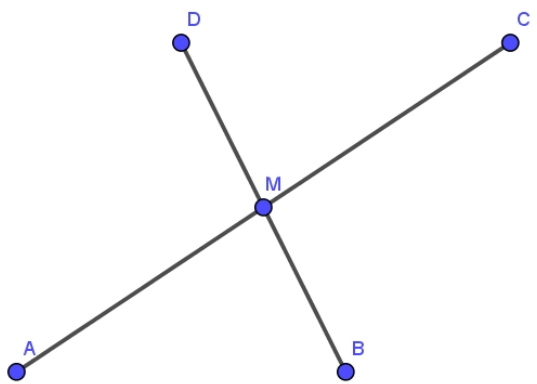
1. Parallelogramm-Kriterium

## Satz

*Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn sich die Diagonalen halbieren.*

## Beweis.

1. Im Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen. Das folgt aus der Punktsymmetrie.
2. Kommentieren und ergänzen Sie die Skizze:



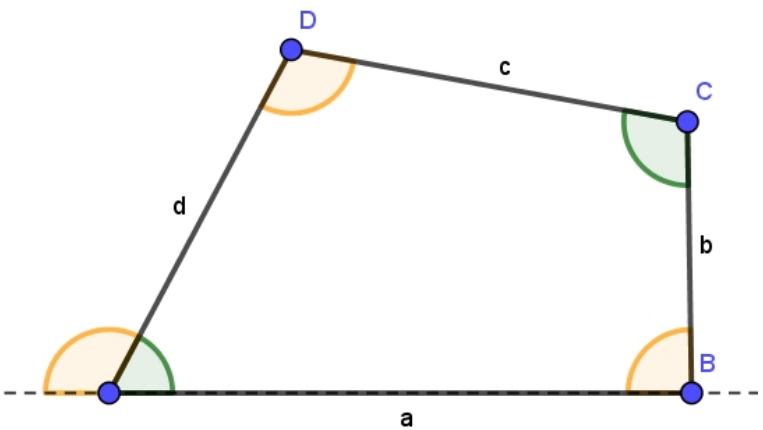
## 2. Parallelogramm-Kriterium

### Satz

*Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn je zwei Gegenwinkel kongruent sind.*

### Beweis.

1. Im Parallelogramm gilt $\alpha = \gamma$ und $\beta = \delta$. Das folgt aus der Punktsymmetrie.
2. Je zwei Gegenwinkel seien kongruent (Bild). Dann gilt $2\alpha + 2\beta = 360°$. Also sind $\alpha$ und $\beta$ Nebenwinkel. Nach der Umkehrung des Stufenwinkelsatzes ist $b \| d$. Analog für $a \| c$.



## 3. Parallelogramm-Kriterium

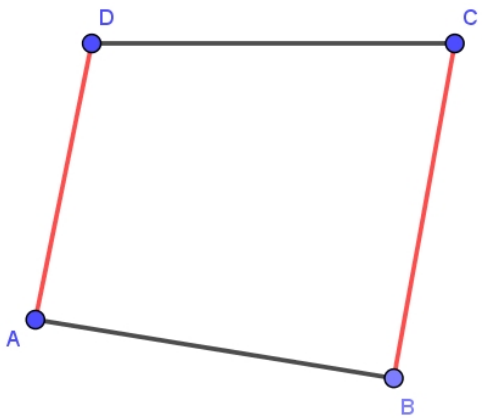
### Satz

*Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn* **je** *zwei Gegenseiten kongruent sind.*

### Beweis.

1. In einem Parallelogramm sind je zwei Gegenseiten kongruent.

- Gegeben sei ein Viereck mit je zwei kongruenten Gegenseiten.




- Hilfslinie?
- $\triangle ABC \cong \triangle ACD$

4. Parallelogramm-Kriterium

**Satz**

*Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn zwei Gegenseiten kongruent und parallel sind.*

**Beweis.**

Übungsaufgabe □

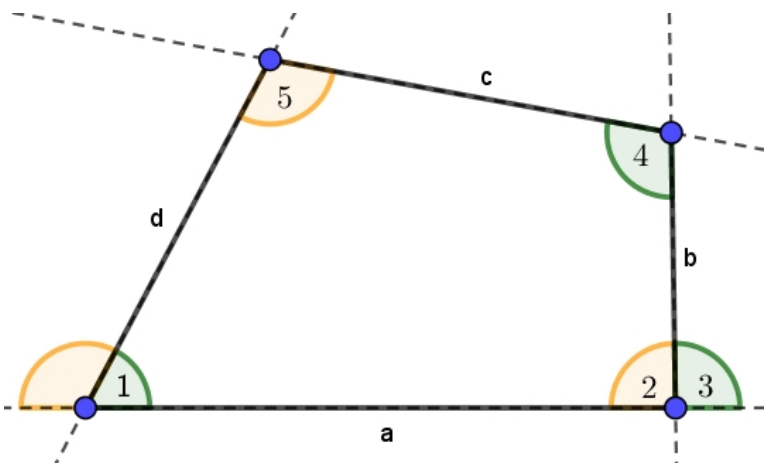
## 5. Parallelogramm-Kriterium

### Satz

*Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn je zwei benachbarte Winkel Nebenwinkel sind, d.h. wenn gilt* $\alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \delta = \delta + \alpha = 180°$.

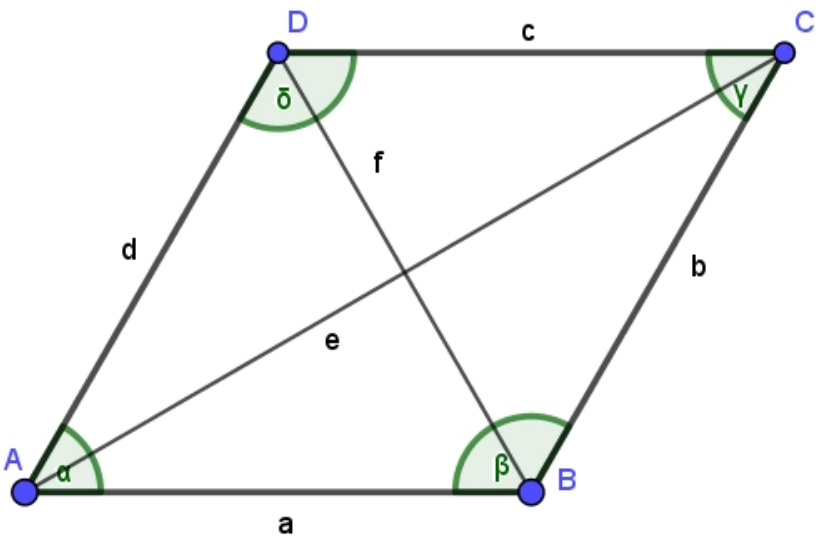
### Beweis.

1. Im Parallelogramm sind nach dem Stufenwinkelsatz je zwei benachbarte Winkel Nebenwinkel.
2. Kommentieren Sie die nebenstehende Zeichnung und folgern Sie, dass je zwei Gegenwinkel kongruent sind.



## Definition

Ein Parallelogramm mit gleich langen Seiten heißt Rhombus oder Raute.




Eigenschaften:

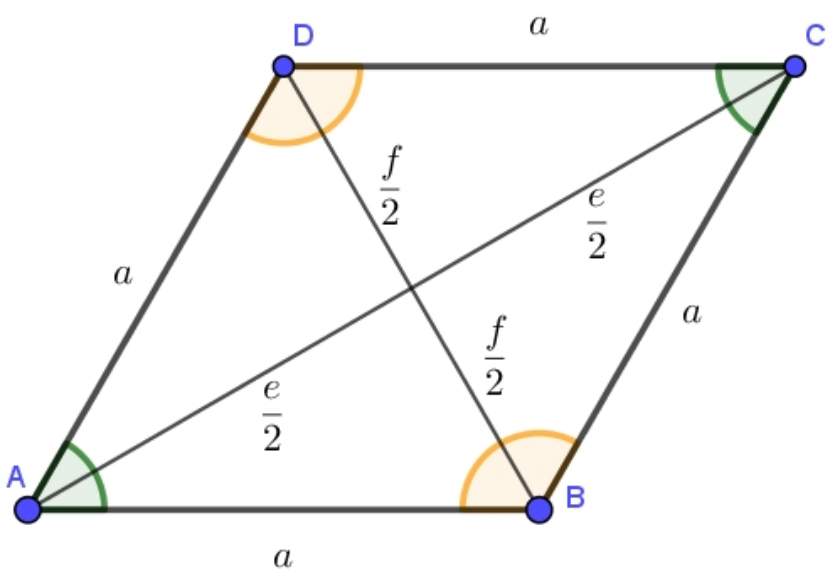
- $AB \| CD$, $BC \| AD$
- $a = b = c = d$
- $\alpha = \gamma, \beta = \delta$
- $\alpha + \delta = 180°$
- Die Diagonalen halbieren einander.

**der** Rhombus

## Satz

*Im Rhombus stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander und sind folglich Symmetrieachsen.*

## Beweis.




Die Dreiecke $\triangle BAD$ und $\triangle BCD$ sind gleichschenklig und folglich ist die Seitenhalbierende $AC$ gleich der Mittelsenkrechten. Dasselbe gilt für das andere Dreieckspaar. Also stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander und sind Symmetrieachsen.

□

1. Rhombus-Kriterium

## Satz

*Ein Viereck ist genau dann ein Rhombus, wenn alle vier Seiten gleich lang sind.*

## Beweis.

1. Im Rhombus sind per Definition alle vier Seiten gleich lang.
2. Gegeben sei ein Viereck mit vier gleich langen Seiten. Man zeichne die Diagonalen ein. Mit Kongruenzsätzen folgt, dass je zwei Gegenwinkel gleich groß sind. Also ist das Viereck ein Parallelogramm und weil die Seiten gleich lang sind, ist es ein Rhombus.

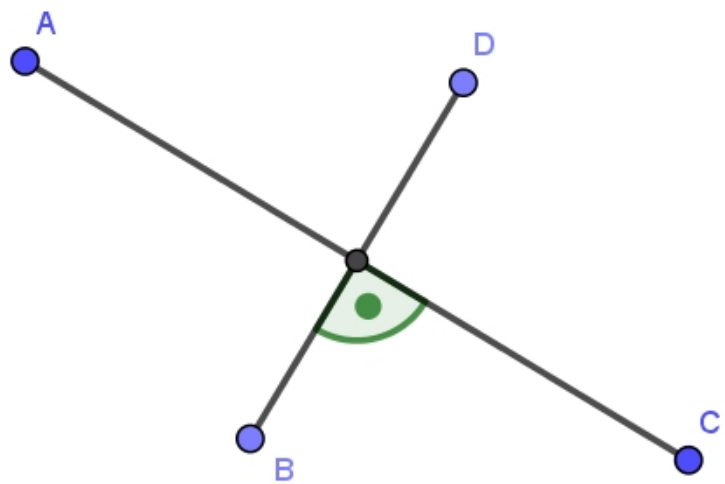
## 2. Rhombus-Kriterium

### Satz

*Ein Viereck ist genau dann ein Rhombus, wenn sich die Diagonalen senkrecht halbieren.*

### Beweis.

1. Im Rhombus halbieren sich die Diagonalen senkrecht.
2. Gegeben sei ein Viereck, in dem sich die Diagonalen senkrecht halbieren. Kommentieren Sie die nebenstehende Zeichnung und folgern Sie, dass alle Seiten gleich lang sind.




□

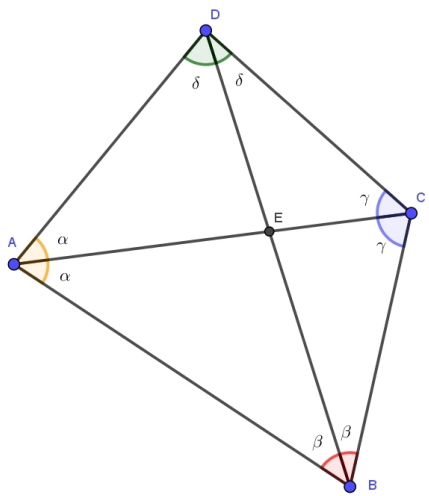
## 3. Rhombus-Kriterium

### Satz

*Ein Viereck ist genau dann ein Rhombus, wenn jede Diagonalen Winkelhalbierende ist.*

### Beweis.

1. z.z.: Im Rhombus ist jede Diagonale Winkelhalbierende. ÜA
2. Gegeben sei ein Viereck, in dem jede Diagonalen Winkelhalbierende ist.
   - Bei $E$ gilt $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ und $\gamma + \beta = \alpha + \delta$. Addition der Gleichungen liefert $\beta = \delta$. Daraus folgt $\alpha = \gamma$. Aus der Winkelsumme im Viereck folgt $\alpha + \beta = 90°$. Also stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander. Nach wsw halbieren sie sich.



- Quadrat als Spezialfall des Rhombus: ein rechter Winkel
- Rechteck als Spezialfall des Parallelogramms: ein rechter Winkel

**Satz**

*In einem Rechteck gilt:*

1. *Alle Innenwinkel sind rechte Winkel.*
2. *Die Mittelsenkrechten sind Symmetrieachsen.*
3. *Die Diagonalen sind gleich lang.*

**Beweis.**

Alle Eigenschaften eines Parallelogramms gelten auch im Rechteck.

1. Wenn ein Winkel ein rechter Winkel ist, dann auch sein Gegenwinkel und sein benachbarter Winkel.

2. und 3. Übungsaufgabe

## Satz

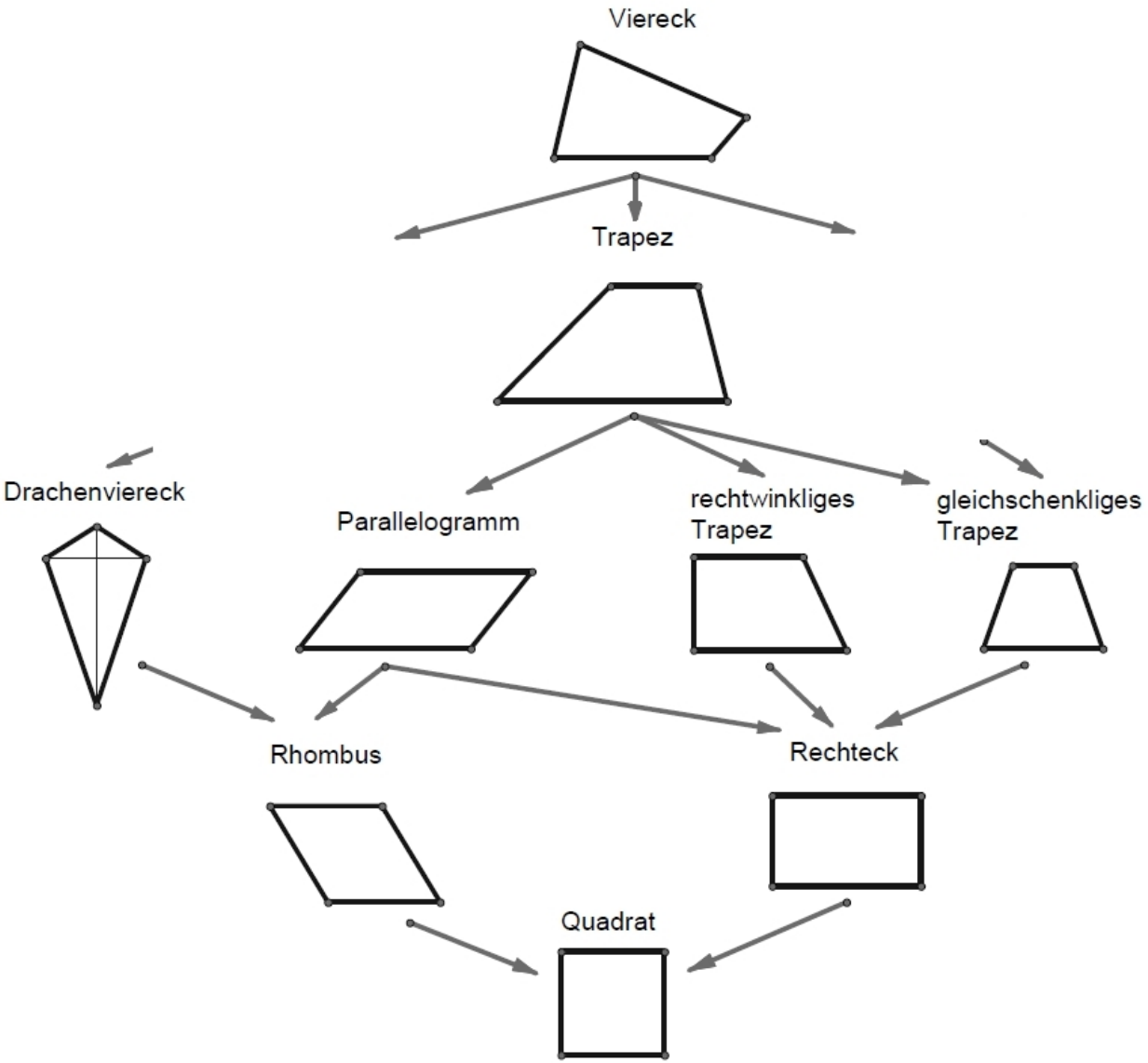
*Ein Parallelogramm ist genau dann ein Rechteck, wenn die Diagonalen gleich lang sind.*

## Beweis.

1. In einem Rechteck sind die Diagonalen gleich lang.
2. Gegeben sei ein Parallelogramm mit gleich langen Diagonalen.
   Da sich die Diagonalen halbieren, sind auch die Hälften alle gleich lang.
   Im Parallelogramm entstehen durch die Diagonalen lauter gleichschenklige Dreiecke.
   Folglich haben diese Dreiecke paarweise gleiche Basiswinkel.
   Aus dem Satz über die Innenwinkelsumme folgt, dass alle Innenwinkel des Parallelogramms rechte Winkel sind.

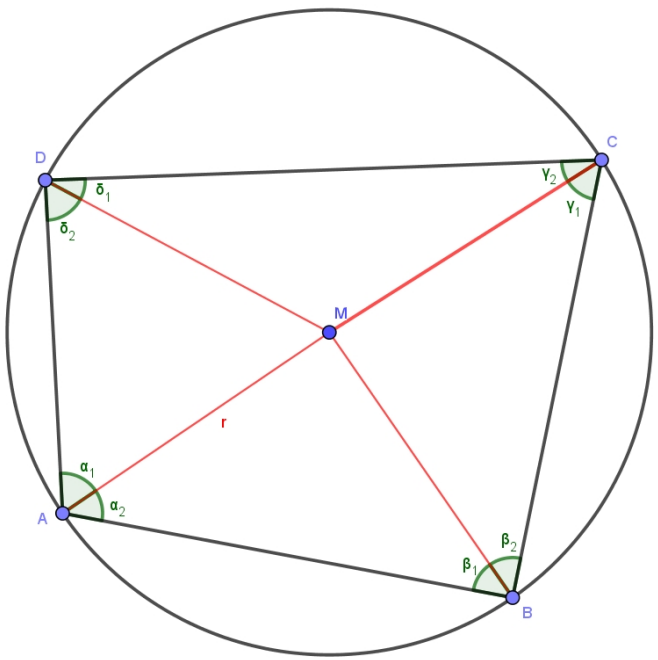
□

# Haus der konvexen Vierecke 1



## Definition

Ein Viereck, dessen Seiten Sehnen eines Kreises sind, heißt Sehnenviereck.




Eigenschaften:

- $|AM| = |BM| = |CM| = |DM|$ per Definition
- $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$

  Beweis?

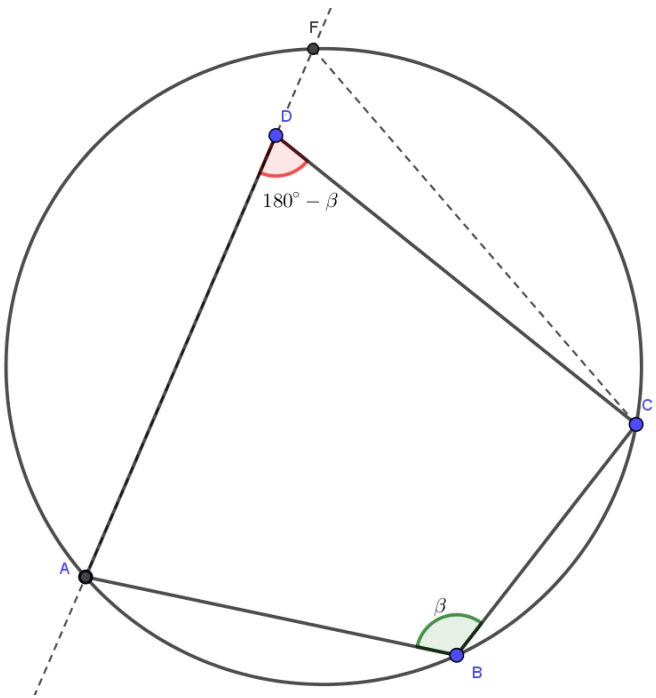
Ein Sehnenviereck ist also ein Viereck mit Umkreis.

## Satz

*Ein Viereck ist genau dann ein Sehnenviereck, wenn sich zwei Gegenwinkel zu* $180°$ *ergänzen.*

## Beweis.

1. Im Sehnenviereck ergänzen sich gegenüberliegende Winkel zu $180°$.
2. Zeichne den Umkreis zu $\triangle ABC$. Angenommen, $D$ liegt nicht auf dem Umkreis $k$. Verlängere $AD$ bis zum Schnittpunkt $F$ mit $k$. Dann beträgt der Winkel bei $F$ $180° - \beta$ und im Dreieck $\triangle DCF$ wäre die Innenwinkelsumme größer als $180°$. Widerspruch! Analog im Fall, dass $D$ außerhalb des Umkreises liegt.



## Aufgaben

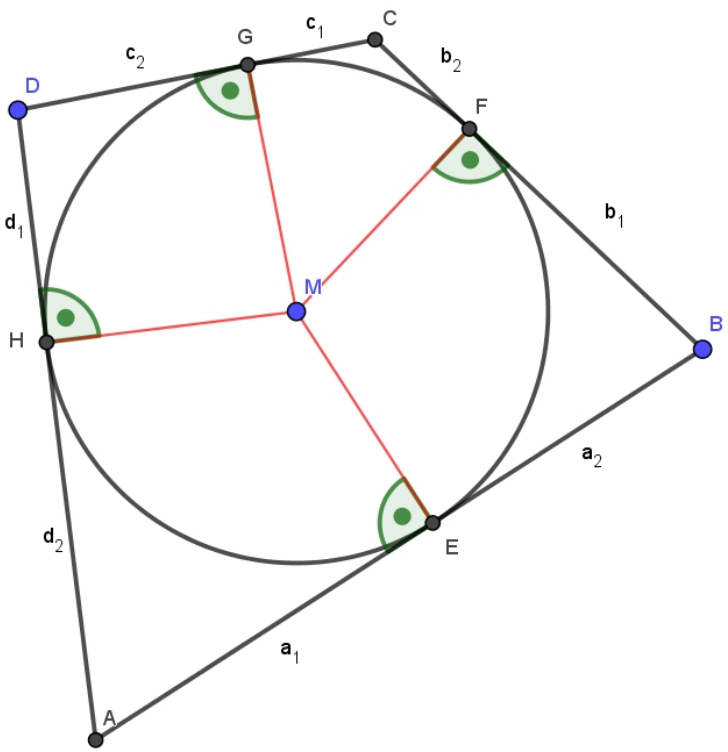
1. *Warum ist ein Rechteck ein Sehnenviereck?*
   *Wie finden Sie den Mittelpunkt des Umkreises?*
2. *Ist ein Rhombus ein Sehnenviereck?*

## Aufgaben

1. *Wie viele Symmetrieachsen hat ein Kreis?*
2. *Was ist die Tangente an einen Kreis im Punkt B?*
3. *Wie konstruiert man die Tangente an einen Kreis im Punkt B?*

## Definition

Ein Viereck, dessen Seiten Tangenten an einen Kreis sind, heißt Tangentenviereck.




Eigenschaften:

- $|EM| = |FM| = |GM| = |HM| = r$ per Definition
- $|AE| = |AH|, |BE| = |BF|,$ $|CF| = |CG|, |DG| = |DH|$

  Beweis?
  Das Viereck $AEMH$ ist symmetrisch bezgl. der Achse $AM$.
- $a + c = b + d$

  Beweis?

Ein Tangentenviereck ist also ein Viereck mit Inkreis.

## Aufgabe

- *Von einem Viereck ABCD sei bekannt, dass es ein Tangentenviereck ist.*
  *Wie finden Sie den Mittelpunkt des Inkreises?*

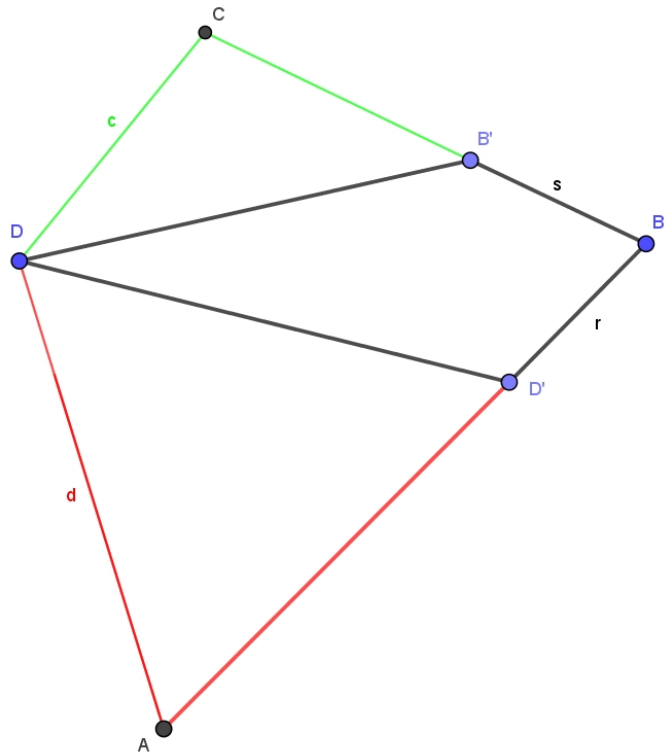
## Satz

*Ein Viereck ist genau dann ein Tangentenviereck, wenn die Summen der Längen je zweier Gegenseiten gleich sind.*

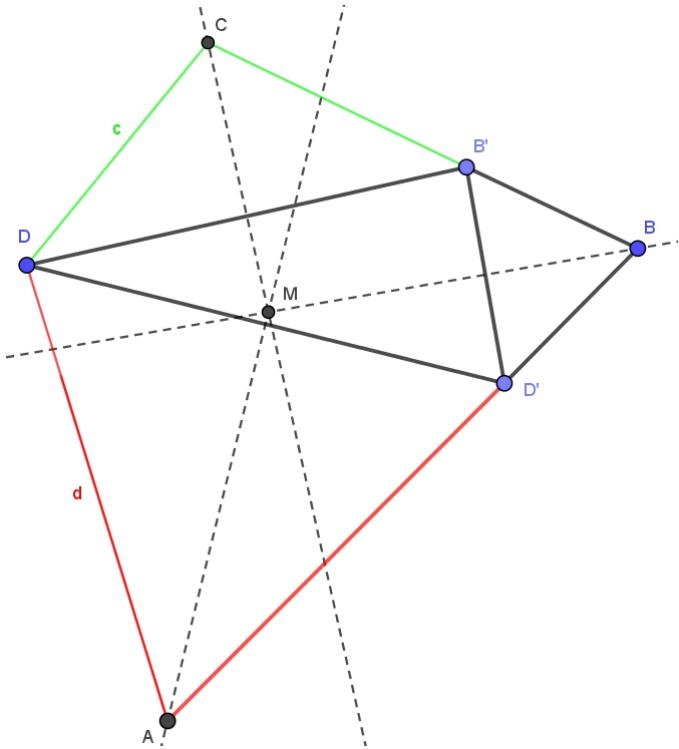
## Beweis.

1. Im Tangentenviereck gilt
   $a + c = b + d$.

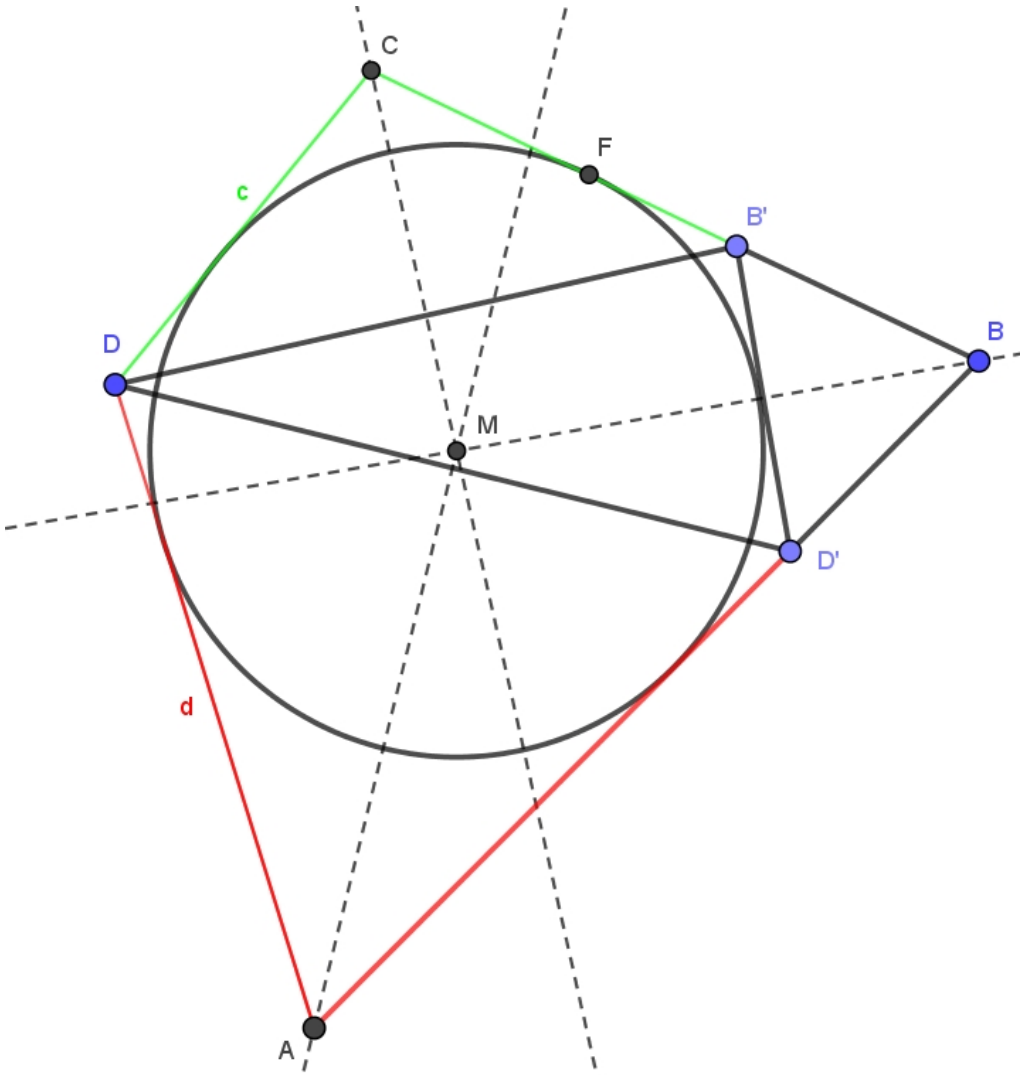
2. In einem Viereck gelte
   $a + c = b + d$.
   ObdA sei $a > d$ und $b > c$.
   Wir tragen $d$ von $A$ aus auf $AB$ ab und erhalten $D'$.
   Wir tragen $c$ von $C$ aus auf $BC$ ab und erhalten $B'$.
   Wegen $d + r + c = d + c + s$ gilt
   $r = s$.



3. Somit sind die Dreiecke $\triangle DAD', \triangle D'BB', \triangle DB'C$ gleichschenklig.
   Ihre Winkelhalbierenden bei $A, B, C$ bzw. $D$ sind die Mittelsenkrechten des Dreiecks $\triangle DD'B'$. Sie schneiden sich in einem Punkt $M$.
   Dieser Punkt $M$ hat dieselbe Entfernung zu den Seiten $a, b, c, d$.
   Er ist also der Mittelpunkt des Inkreises.



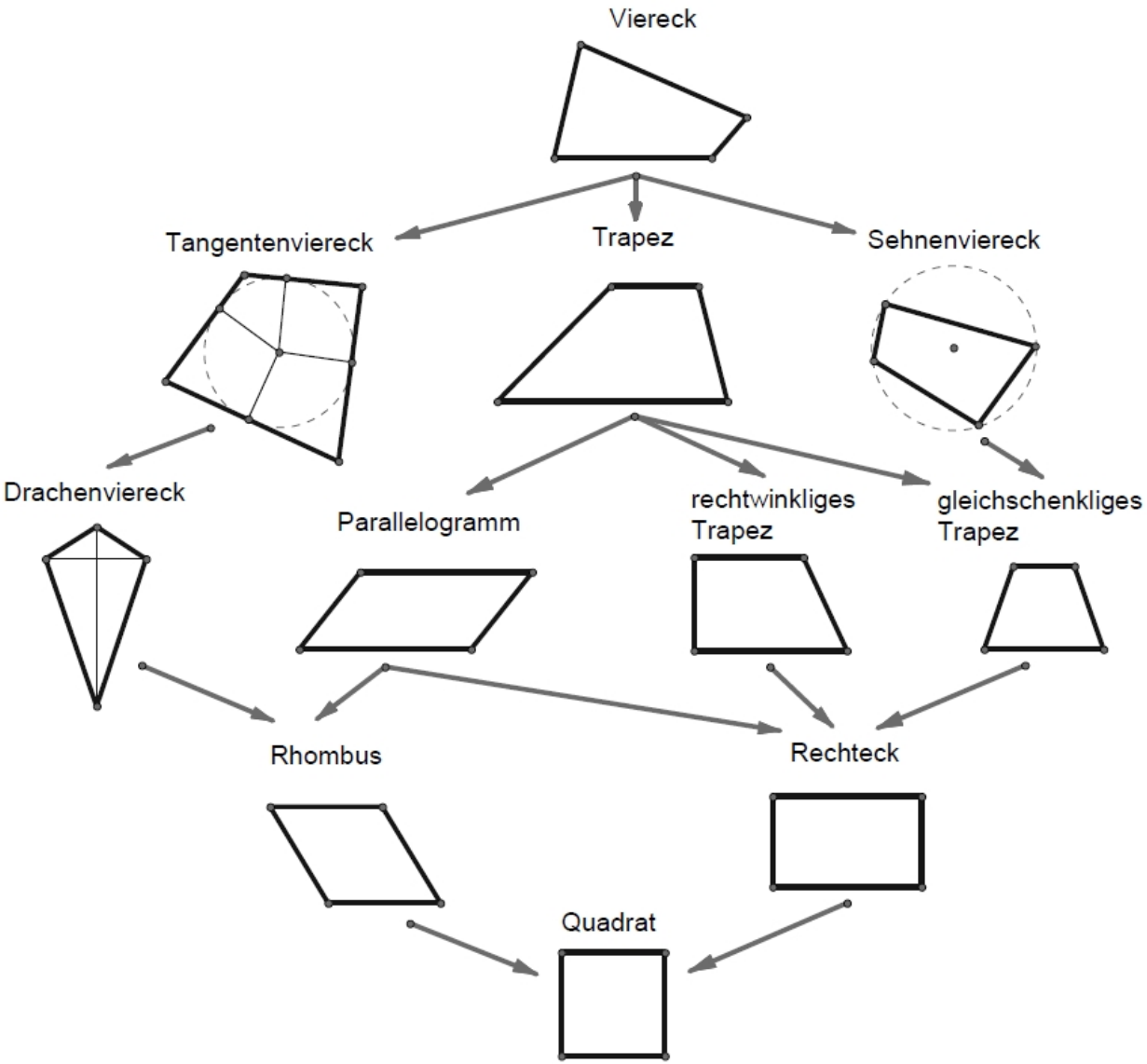

□

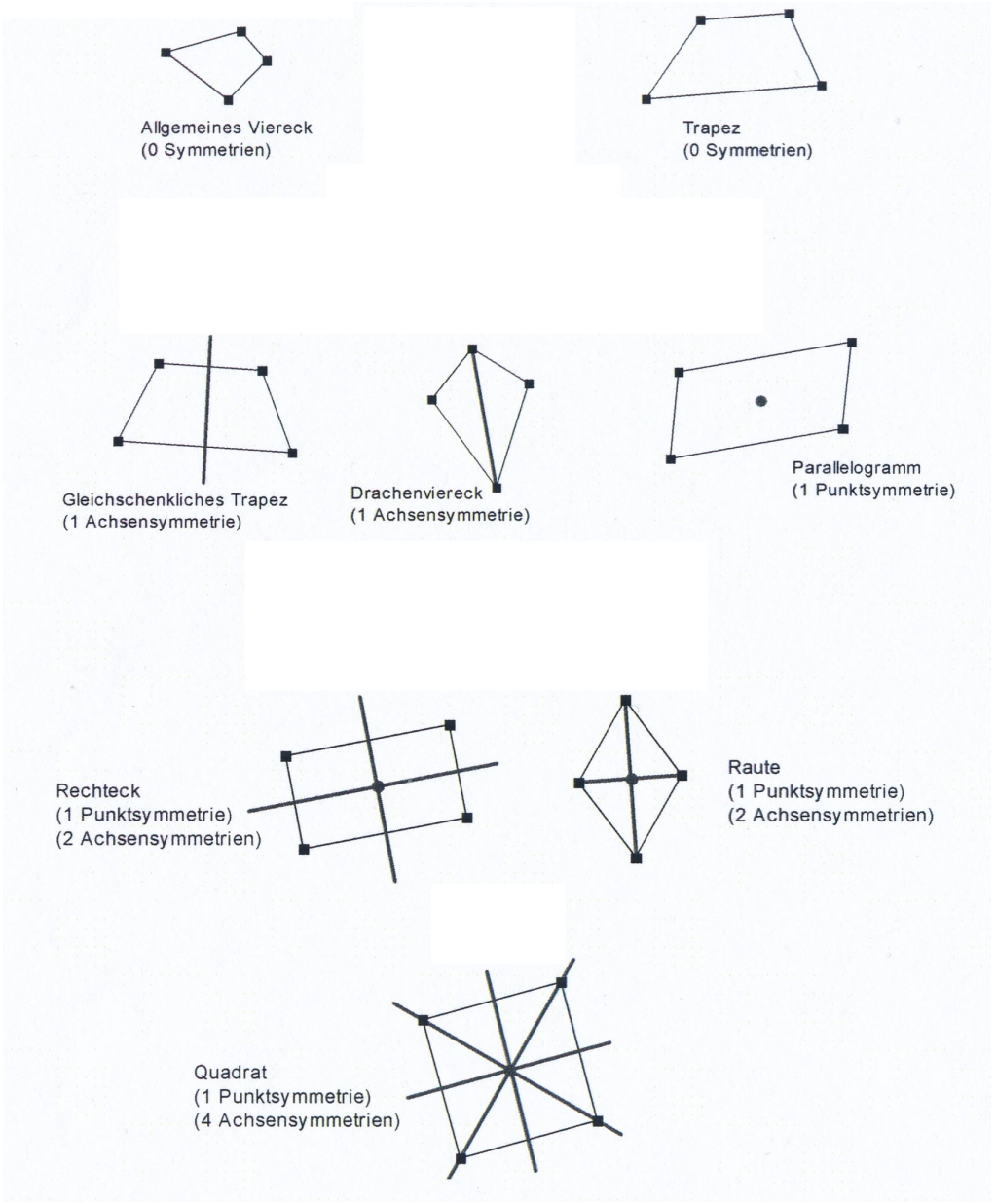

C
F
c
B'
D
B
M
D'
d
A

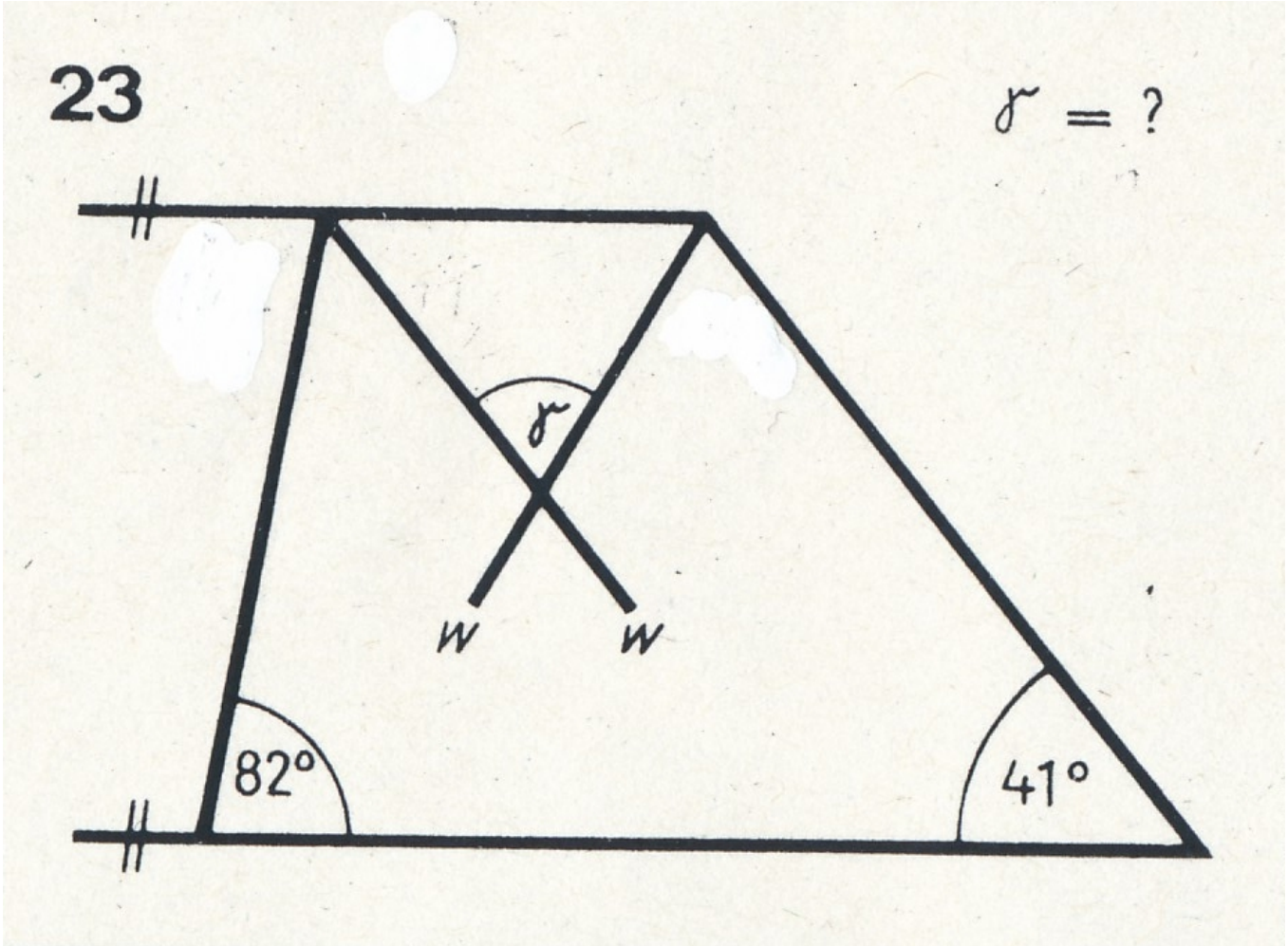
## Aufgaben

- *Welche Vierecke sind Tangentenvierecke?*
- *Welche Vierecke sind keine Tangentenvierecke?*
- *Welches Viereck ist sowohl Sehnen- als auch Tangentenviereck?*

# Haus der konvexen Vierecke 2

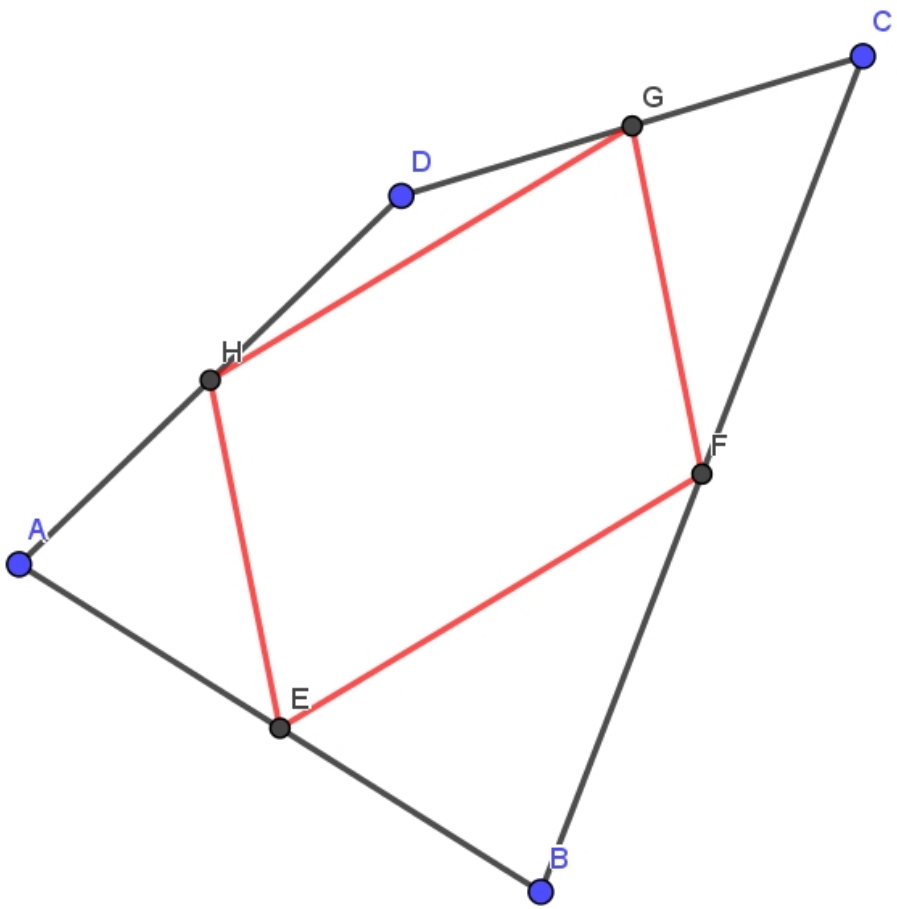



Allgemeines Viereck
(0 Symmetrien)
Trapez
(0 Symmetrien)
Gleichschenkliches Trapez
(1 Achsensymmetrie)
Drachenviereck
(1 Achsensymmetrie)
Parallelogramm
(1 Punktsymmetrie)
Rechteck
(1 Punktsymmetrie)
(2 Achsensymmetrien)
Raute
(1 Punktsymmetrie)
(2 Achsensymmetrien)
Quadrat
(1 Punktsymmetrie)
(4 Achsensymmetrien)




Lösung: $61,5°$

## Satz von Varignon (1731)

### Satz

*Das Seitenmittenviereck eines beliebigen Vierecks ist ein Parallelogramm.*