Satzgruppe des Pythagoras

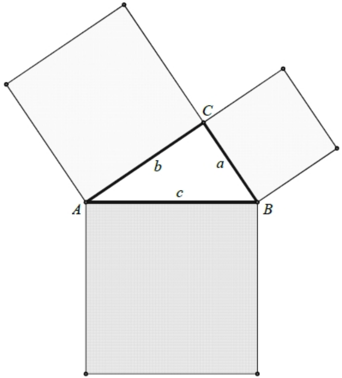
Dr. Elke Warmuth

Sommersemester 2018

Satz

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächen der Quadrate über den Katheten gleich der Fläche des Quadrats über der Hypotenuse. Wenn c die Hypotenuse bezeichnet, gilt also

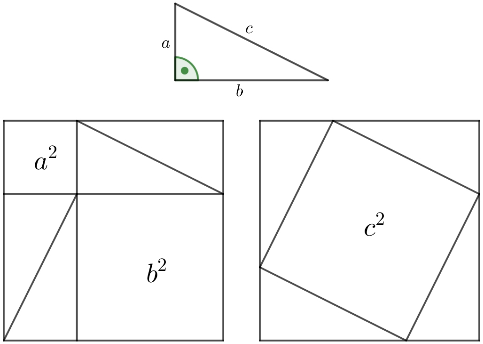
$$c^2 = a^2 + b^2$$



- Pythagoras von Samos: griechischer Mathematiker und Philosoph, ca. 580–ca. 500 v. Chr.
- Bund der Pythagoreer: religiöse Sekte, aber mit mathematischer Orientierung, bedeutende Beiträge zur Mathematik
- ca. 400 Beweise des Satzes des Pythagoras, z.B. in den Elementen des Euklid
- In einer Statue vor dem Zeughaus in Berlin gibt es einen Schüler, der eine Tafel mit einer Abbildung zu einem Beweis des Satzes von Pythagoras zeigt.
- Satz des Pythagoras war schon früher bekannt und wurde angewendet, z.B. in der babylonischen Mathematik, 1900 bis 1600 v. Chr.

altindischer Ergänzungsbeweis (ca. 600 v. Chr.)

Beweis.



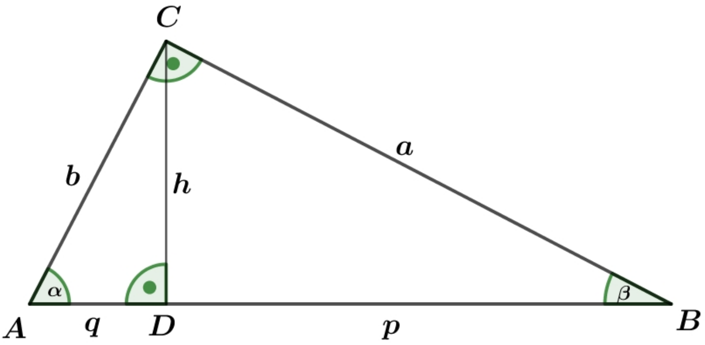
□

Aufgabe

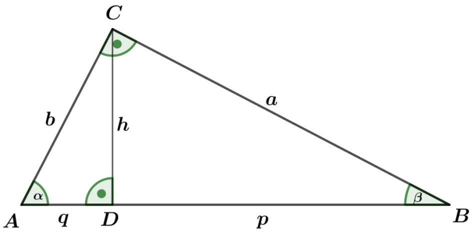
Kommentieren Sie die Bilder.

Ähnlichkeitsbeweis

Es sei $p + q = c$.



Es gilt $\triangle ABC \sim \triangle BCD \sim \triangle CAD$. Warum?



	$\triangle ABC$	$\triangle BCD$	$\triangle CAD$
Hypotenuse	c	a	b
Kathete mit $\alpha, 90°$	b	h	q
Kathete mit $\beta, 90°$	a	p	h

Es folgt:

$$c : a = a : p \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = p \cdot c$$
$$c : b = b : q \quad \Leftrightarrow \quad b^2 = q \cdot c$$
$$\Rightarrow a^2 + b^2 = (p + q) \cdot c = c^2.$$

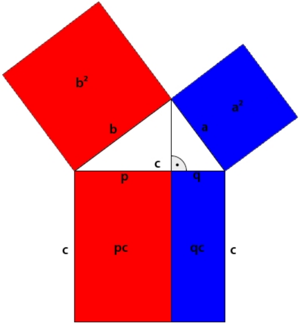
$\square$

Bewiesen haben wir soeben auch den Kathetensatz

Satz

In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete inhaltsgleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem dieser Kathete anliegenden Hypothenusenabschnitt. Wenn c die Hypotenuse bezeichnet, gilt also

$$a^2 = p \cdot c \text{ bzw. } b^2 = q \cdot c.$$



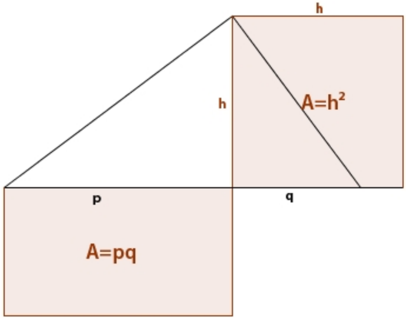
Quelle für die Abb.: `http://exbook.de/20071212-satzgruppe-des-pythagoras-kathetensatz/`

Zur Satzgruppe des Pythagoras gehört noch der Höhensatz:

Satz

In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe h inhaltsgleich dem Rechteck aus den beiden Hypothenusenabschnitten p und q. Es gilt also

$$h^2 = p \cdot q.$$



Quelle für die Abb.: `http://exbook.de/20071209-satzgruppe-des-pythagoras-hoehensatz/`

Beweis.

Übungsaufgabe. Hinweis: ähnliche Dreiecke. □

Es gilt

$$\text{Satz des Pythagoras} \Leftrightarrow \text{Kathetensatz} \Leftrightarrow \text{Höhensatz}.$$

Alle drei Sätze sind umkehrbar. Beispielsweise gilt:

Satz

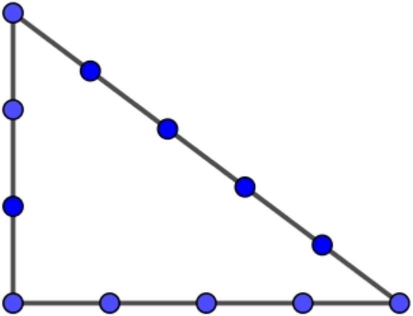
Gilt für die Seitenlängen eines Dreiecks $\triangle ABC$ die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$, so liegt der Seite c ein rechter Winkel gegenüber.

Beweis.

Sei $\triangle A'B'C'$ ein Dreieck mit den Seiten a und b, welche einen rechten Winkel einschließen. Die dritte Seite nennen wir c'. Für das Dreieck $\triangle A'B'C'$ gilt der Satz des Pythagoras $a^2 + b^2 = (c')^2$. Aus der Voraussetzung folgt $c^2 = (c')^2$, also $c = c'$. Nach sss sind $\triangle A'B'C'$ und $\triangle ABC$ kongruent, d.h. das $\triangle ABC$ ist rechtwinklig. $\square$

Anwendung der Umkehrung: Abstecken rechter Winkel mit Knotenschnüren.

Papyrus Kairo, ca. 300 v. Chr.



$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Pythagoreische Tripel

Definition

Ein Tripel natürlicher Zahlen (a, b, c) heißt pythagoreisches Tripel, falls $a^2 + b^2 = c^2$ gilt.

Bemerkungen

- *Mit* (a, b, c) *ist auch* (ka, kb, kc) *mit* $k \in \mathbb{N}$ *ein pythagoreisches Tripel. Beispiel:* $(6, 8, 10)$.
- *Ein pythagoreisches Tripel* (a, b, c) *heißt primitives pythagoreisches Tripel, falls* a, b, c *keinen gemeinsamen Teiler ungleich 1 haben.*

Konstruktion primitiver pythagoreischer Tripel:

- Man nehme $u < v$ teilerfremde natürliche Zahlen, von denen eine gerade und die andere ungerade ist.
- Man bilde

$$a = v^2 - u^2, b = 2uv, c = v^2 + u^2.$$

  (a, b, c) ist ein primitives pythagoreisches Tripel.
- Umgekehrt entsteht jedes primitive pythagoreische Tripel auf diese Weise.

Aufgabe

Konstruieren Sie sich **Ihr** *primitives pythagoreisches Tripel.*

Das Fermatsche Problem

Gibt es für $n > 2$ natürliche Zahlen a, b, c, die die Gleichung

$$a^n + b^n = c^n$$

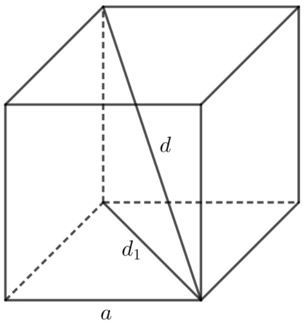
erfüllen?

- Pierre de Fermat (17. Jh.): vermutet die Antwort: NEIN.
- Andrew Wiles (1994): beweist die Antwort: NEIN.
- Simon Singh: Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels. Deutscher Taschenbuch-Verlag, München 2000, ISBN 3-423-33052-X.

Längen berechnen

Beispiel

Länge der Raumdiagonale in einem Würfel mit der Kantenlänge a



- $d_1^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$
- $d^2 = a^2 + d_1^2 = 3a^2$
- $d = \sqrt{3}a$

Aufgaben

1. *Die Sehne eines Kreises mit dem Radius 5 cm (r cm) ist vom Kreismittelpunkt 3 cm (a cm) entfernt.*
   Wie lang ist sie?
   Lösung:

   $$2\sqrt{r^2 - a^2} \text{ cm bzw. } 8 \text{ cm}$$

2. *Eine Leiter ist an eine Mauer angelehnt. Sie soll 13,5 m hoch reichen, während ihr Fuß 2,5 m von der Wand absteht.*
   Wie lang muss die Leiter sein, um für diesen Zweck brauchbar zu sein?
   Lösung:

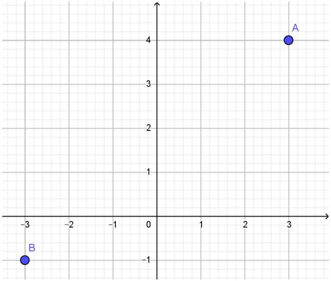
   $$l = \sqrt{13,5^2 + 2,5^2} = \sqrt{188,5} \approx 13,73LE$$

   Sie muss 13,8 m lang sein.

Abstände berechnen

Aufgabe

Welchen Abstand haben die Punkte mit den Koordinaten $A(3;4)$ *und* $B(-3;-1)$ *im kartesischen Koordinatensystem?*

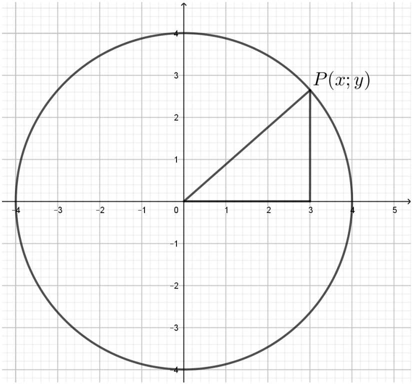


Lösung:

$$|AB|^2 = 5^2 + 6^2 \Rightarrow |AB| = \sqrt{61} \approx 7,8.$$

Kreisgleichung

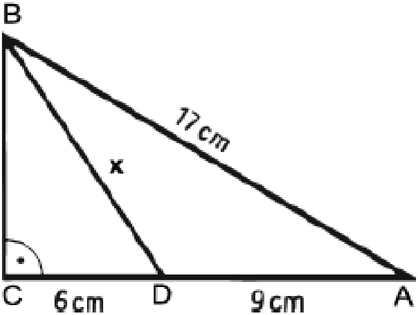
Gegeben sei ein Kreis mit dem Mittelpunkt $M(0;0)$ und dem Radius 4.
Wie kann man feststellen, ob der Punkt $P(3,2;2,1)$ auf dem Kreis liegt?



$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4^2 \\ 2,1^2 + 3,2^2 &= 14,65 < 16. \end{aligned}$$

Der Punkt P liegt innerhalb des Kreises.

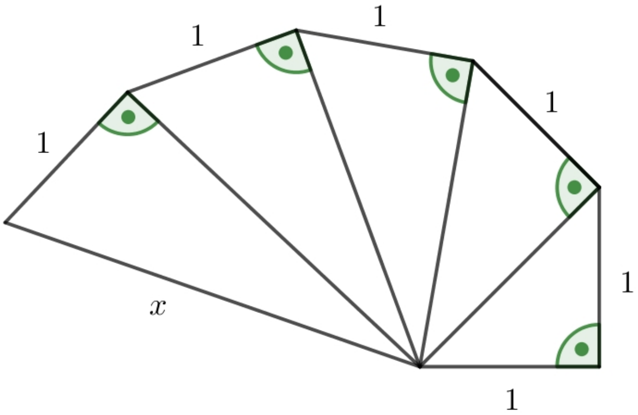
Denkaufgabe



$x = ?$

Lösung: $x = 10$ cm

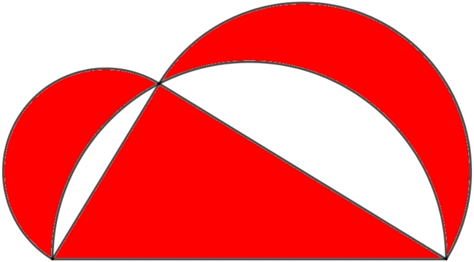
Quadratwurzeln konstruieren



$x =?$

Lösung: $x = \sqrt{6}$ cm

Möndchen des Hippokrates (ca. 400 v. Chr.)

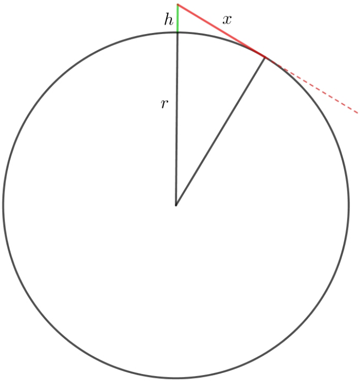


- rechtwinkliges Dreieck $\triangle ABC$
- Halbkreise über den Seiten mit Flächeninhalten $\frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2, \frac{\pi}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2, \frac{\pi}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^2$
- Fläche der Möndchen $=$

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{\pi}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{\pi}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \frac{a \cdot b}{2}$$

$=$ Dreiecksfläche

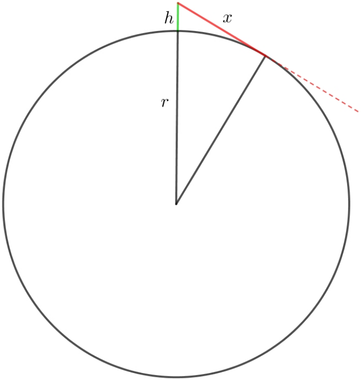
Wie weit kann man sehen? (Geodätische Sichtweite)



- Erdradius $r = 6370$ km

Aufgabe

Berechnen Sie x in Abhängigkeit von h.



- Erdradius $r = 6370$ km
- $r^2 + x^2 = (r+h)^2 \Leftrightarrow$
  $x^2 = 2rh + h^2$
- $x = \sqrt{2rh + h^2} \approx \sqrt{2rh}$

  Warum?
- x im km, h in m:
  $x \approx 3,57\sqrt{h}$
- Beispiele:

h in m	x in km
1,60	4,5
30	20
365	68

Architektur – Maßwerke

Praktische Anwendungen

23. Fig. 191 zeigt ein romanisches Motiv. Der Radius des äußersten Kreises sei R. Berechne den Radius des kleinen Vollkreises.

24. Fig. 192 zeigt das Maßwerk eines gotischen Kirchenfensters (Christuskirche in Frankfurt a. M., nach Gerlach). Die großen Bogen sind gedrückte; es ist

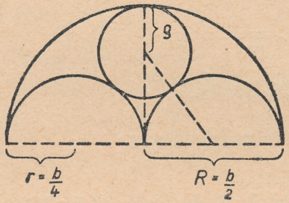


Fig. 191

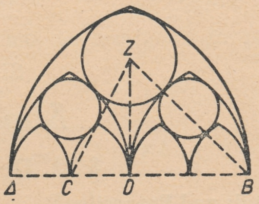
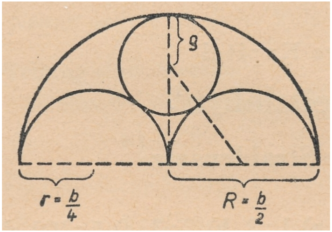
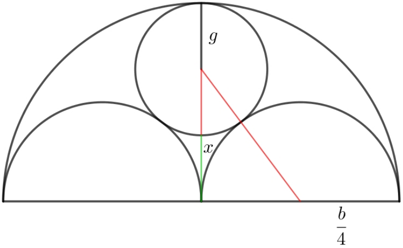
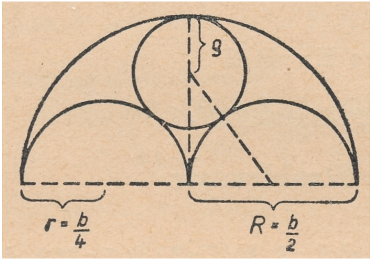


Fig. 192





$$
\begin{aligned}
& \left(\tfrac{b}{2} - g\right)^2 + \left(\tfrac{b}{4}\right)^2 &=& \left(g + \tfrac{b}{4}\right)^2 \\
\Leftrightarrow\quad & \left(\tfrac{b}{2}\right)^2 - bg + g^2 + \left(\tfrac{b}{4}\right)^2 &=& g^2 + g\tfrac{b}{2} + \left(\tfrac{b}{4}\right)^2 \\
\Leftrightarrow\quad & \left(\tfrac{b}{2}\right)^2 - \tfrac{3}{2}bg &=& 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \tfrac{b}{2}\left(\tfrac{b}{2} - 3g\right) &=& 0 \\
\Rightarrow\quad & g &=& \tfrac{b}{6}
\end{aligned}
$$

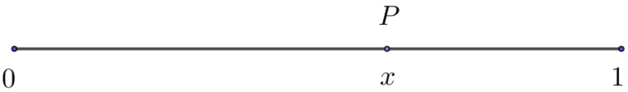


Aufgabe

Konstruieren Sie das romanische Fenster für $b = 12$ cm.

Goldener Schnitt

Ein Punkt P teilt die Strecke $[0, 1]$



im Goldenen Schnitt, wenn gilt

$$1 : x = x : (1 - x).$$

Aufgabe

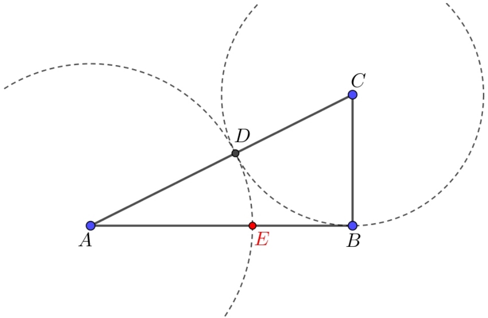
Berechnen Sie x.

Lösung: $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$ bzw. $\frac{1}{x} \approx 1,618$

Goldener Schnitt

- wird als ästhetisch besonders gefällig empfunden
- finden wir in Kunst und Architektur
- kein Beleg für bewusste Anwendung beim Leipziger Rathaus
- tritt am menschlichen Körper auf: Bauchnabel als Teilungspunkt
- x ist irrational, aber algebraisch, kann also mit Zirkel und Lineal konstruiert werden.

Konstruktion des Goldenen Schnittes

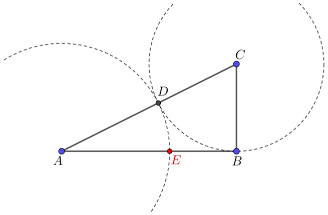


Es ist $|AB| = 2a$ und $|BC| = a$ sowie $\measuredangle ABC = 90^\circ$

Aufgabe

- *Führen Sie die Konstruktion aus.*
- *Begründen Sie, dass E die Strecke AB im Goldenen Schnitt teilt.*

Lösung:

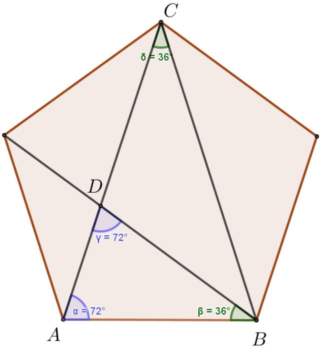


$|AB| = 2a, |BC| = a$

Sei $|AE| = x$. Dann gilt nach Pythagoras

$$\begin{aligned}
(2a)^2 + a^2 &= (x+a)^2 \\
x^2 + 2ax - 4a^2 &= 0 \\
x_{1,2} &= a \pm \sqrt{a^2 + 4a^2} \\
x_{1,2} &= a \pm \sqrt{5}a \\
x &= a + \sqrt{5}a \\
\frac{x}{2a} &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

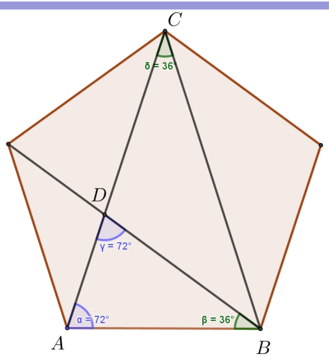
Goldener Schnitt im regelmäßigen Fünfeck



$|AB| = s, |BC| = d$

Aufgabe

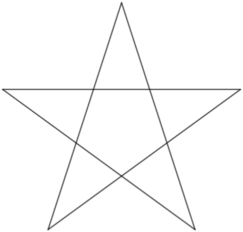
Verifizieren Sie die angegebenen Winkelmaße.



- $|AB| = s, |BC| = d$
- $\triangle ABC \sim \triangle DAB$
- $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|AD|} \Leftrightarrow \frac{d}{s} = \frac{s}{d-s}$
- $d(d-s) = s^2 \Leftrightarrow$ $\left(\frac{s}{d}\right)^2 + \frac{s}{d} - 1 = 0$
- $\frac{s}{d}$ ist der Goldene Schnitt.

Satz

Im regelmäßigen Fünfeck schneiden sich die Diagonalen im Verhältnis des Goldenen Schnitts.
Die Längen der Seiten und der Diagonalen stehen zueinander im Verhältnis des Goldenen Schnitts.



- Das Pentagramm war das Ordenszeichen der Pythagoreer.
- Die Länge der Diagonale und die Seitenlänge im Pentagramm sind zueinander inkommensurabel.
- Strecken sind zueinander *kommensurabel*, wenn die Länge der Strecken ganzzahlige Vielfache der Länge einer als Einheitsstrecke aufgefassten dritten Strecke sind.

- Inkommensurabilität von Strecken heißt also, dass das Längenverhältnis eine irrationale Zahl ist.
- Die Entdeckung der Irrationalität – noch dazu in ihrem Ordenszeichen – zerstörte die Grundlagen der Weltsicht der Pythagoreer, wonach sich alles durch natürliche Zahlen ausdrücken lässt.

Definition

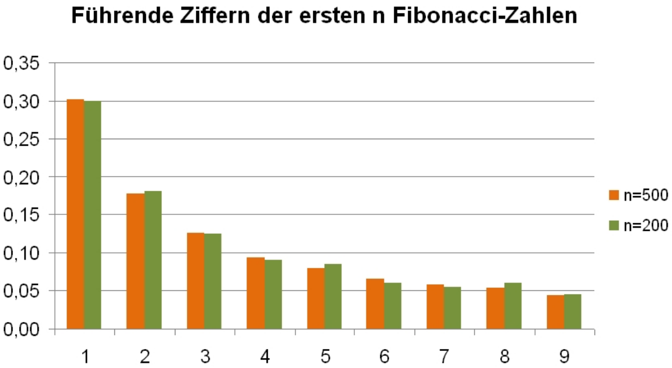
Die Zahlenfolge

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right], n = 1, 2, \ldots$$

heißt Fibonacci-Folge.

Ihre ersten Glieder lauten $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$.

Es gilt $f_n \in \mathbb{N}$ für alle n.



Satz

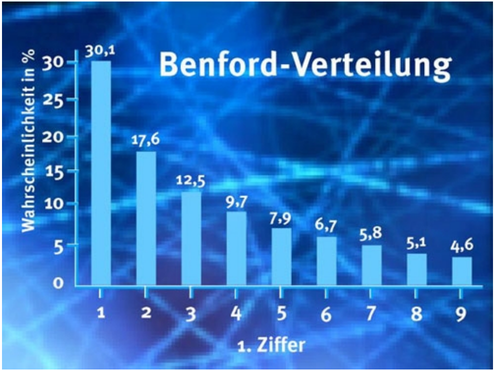
Die führenden Ziffern der Fibonacci-Folge gehorchen der Benford-Verteilung.

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – nichtnegative Zahlen,

  z.B. 3,14; 0,07; 1000, ...
- führende Ziffer: erste von 0 verschiedene Ziffer,

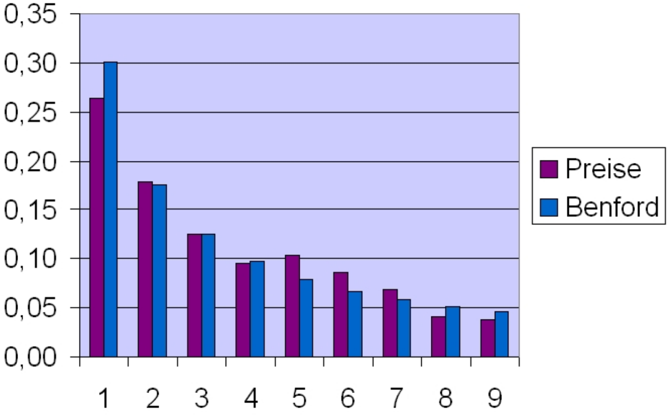
  im Beispiel 3, 7, 1, ...

Wie sind in einer Menge von Zahlen die führenden Ziffern verteilt?

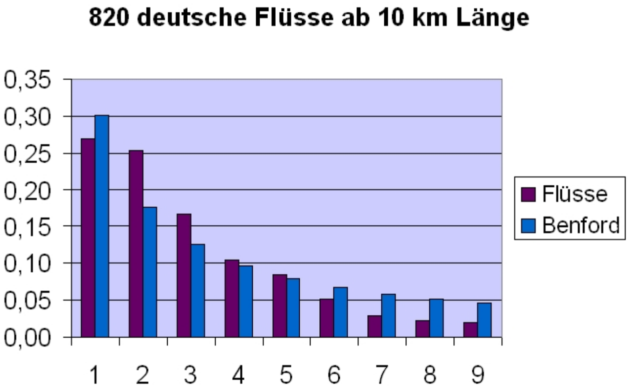


Rund 2500 Einkaufszettel aus dem Bereich Lebensmittel und Haushalt ausgewertet von Walter Warmuth

Statistik der Einkaufszettel



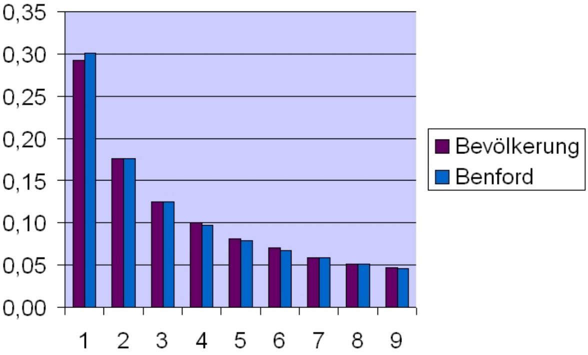
Verblüffend gute Näherung an die Benford-Verteilung.



Donau (2857), Rhein (1236), Elbe (1091), 10. Spree (400)

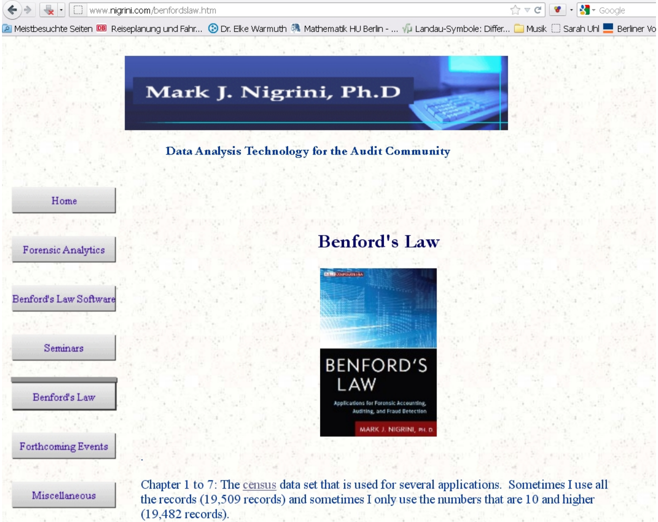
Einwohnerzahlen der 12 227 Gemeinden Deutschlands

Stichtag 31.12.2008



Berlin(3,4 Mio), Hamburg (1,8 Mio), München (1,3 Mio), Wiedenborstel (5)

- Frank Benford (1883-1948) wiederholte 57 Jahre nach Newcomb dessen inzwischen vergessene Beobachtung
- belegte sie mit über 20 000 Daten – Flüsse, Einwohnerzahlen, physikalische Konstanten, Auflagenhöhen von Zeitschriften usw.
- Viele seiner Datensätze einzeln und besonders die Vereinigung aller Daten gehorchen auffallend gut der **Benford-Verteilung**.


www.nigrini.com/benfordslaw.htm
Meistbesuchte Seiten
Reiseplanung und Fahr...
Dr. Elke Warmuth
Mathematik HU Berlin - ...
Landau-Symbole: Differ...
Musik
Sarah Uhl
Berliner Vo
Google
Mark J. Nigrini, Ph.D
Data Analysis Technology for the Audit Community
Home
Forensic Analytics
Benford's Law Software
Seminars
Benford's Law
Forthcoming Events
Miscellaneous
Benford's Law
BENFORD'S LAW
Applications for Forensic Accounting, Auditing, and Fraud Detection
MARK J. NIGRINI, PH. D
Chapter 1 to 7: The census data set that is used for several applications. Sometimes I use all the records (19,509 records) and sometimes I only use the numbers that are 10 and higher (19,482 records).