Geometrische Abbildungen der Ebene

Dr. Elke Warmuth

Sommersemester 2018

Bezeichnungen

Kongruenzabbildungen

Spiegelungen

Klassifikation aller Kongruenzabbildungen

- Abbildung, Funktion, Transformation – Synonyme
- Definitionsbereich = Wertebereich = alle Punkte der Ebene
- Bezeichnung mit kleinen griechischen Buchstaben: $\alpha, \beta, \sigma, \ldots$
- $\alpha(P)$ ist der Bildpunkt von P, manchmal auch P'
- Verkettung von Abbildungen: $\beta \circ \alpha(P) = \beta(\alpha(P))$, erst α, dann β
- Identität *id*: Für alle P gilt $id(P) = P$.
- Umkehrabbildung α^{-1}:

$$\alpha \circ \alpha^{-1}(P) = \alpha^{-1} \circ \alpha(P) = id(P) = P$$

Bemerkung

Die folgenden Ausführungen orientieren sich an der Vorlesung von A. Beutelspacher „Wissenschaftliche Grundlagen des Mathematischen Schulstoffs“. Kapitel 4. Geometrische Abbildungen. WS 2003/2004.

Definition

Eine Abbildung α der Punktmenge der Ebene in sich heißt Kongruenzabbildung (auch Bewegung oder Isometrie), wenn für je zwei Punkte P, Q gilt:

$$|\alpha(P)\alpha(Q)| = |PQ|.$$

In Worten: Eine Kongruenzabbildung ist eine Abbildung, die den Abstand je zweier Punkte erhält.

Beispiele

- Verschiebung
- Drehung
- Spiegelung an einer Gerade, Punktspiegelung

Gegenbeispiel

Zentrische Streckung mit Streckungsfaktor $k \neq 1$.

Eigenschaften von Kongruenzabbildungen

- Sie sind eineindeutig.
- Zwischenbeziehung bleibt erhalten.
- Strecken werden auf Strecken abbildet,
- Halbgeraden werden auf Halbgeraden abbildet.
- Geraden werden auf Geraden abbildet.
- Winkel werden auf Winkel desselben Maßes abgebildet.

Wir beweisen einige dieser Eigenschaften und lernen alle Kongruenzabbildungen kennen.

Satz

Jede Kongruenzabbildung ist eineindeutig.

Beweis.

Wir müssen zeigen: Aus $\alpha(P) = \alpha(Q)$ folgt $P = Q$.

Aus $\alpha(P) = \alpha(Q)$ folgt $|\alpha(P)\alpha(Q)| = 0$. Wegen $|\alpha(P)\alpha(Q)| = |PQ|$ folgt $|PQ| = 0$ und somit $P = Q$. □

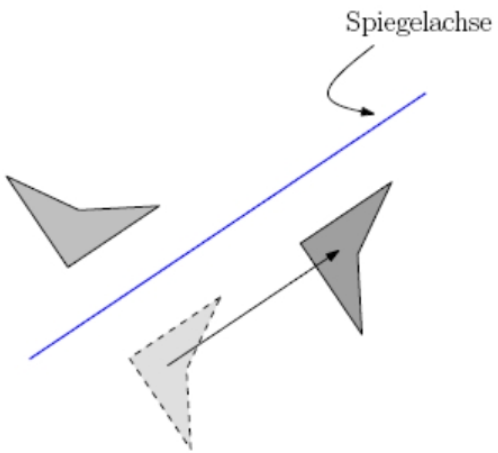
Man kann zeigen, dass bei einer Kongruenzabbildung jeder Punkt der Ebene Bildpunkt ist. Eine Kongruenzabbildung bildet also die Ebene **auf** sich ab.

Zusammen mit der Eineindeutigkeit folgt daraus, dass jede Kongruenzabbildung α eine inverse Abbildung α^{-1} der Ebene auf sich besitzt.

Satz

1. *Die Verkettung von zwei Kongruenzabbildungen ist wieder eine Kongruenzabbildung.*
2. *Die zu einer Kongruenzabbildung inverse Abbildung ist wieder eine Kongruenzabbildung.*

Beispiel



Die Verkettung einer Spiegelung und einer Verschiebung entlang der Spiegelachse ist eine Kongruenzabbildung (Gleit- oder Schubspiegelung).

Bildquelle: `https://de.wikipedia.org/wiki/Gleitspiegelung`

Beweis.

1. Seien α, β Kongruenzabbildungen. Dann gilt

$$|\beta\circ\alpha(P)\beta\circ\alpha(Q)| = |\beta(\alpha(P))\beta(\alpha(Q))| = |\alpha(P)\alpha(Q)| = |PQ|.$$

2. Sei α eine Kongruenzabbildung und α^{-1} ihre Inverse. Dann gilt

$$|\alpha^{-1}(P)\alpha^{-1}(Q)| = |\alpha(\alpha^{-1}(P))\alpha(\alpha^{-1}(Q))| = |PQ|.$$

□

Satz

Jede Kongruenzabbildung erhält die Zwischenbeziehung und bildet kollineare Punkte auf kollineare Punkte ab.

Beweis.

Sei α eine Kongruenzabbildung und Z ein Punkt zwischen P und Q. Wir zeigen, dass dann $\alpha(Z)$ zwischen $\alpha(P)$ und $\alpha(Q)$ liegt.

Dass Z zwischen P und Q liegt, heißt $|PZ| + |ZQ| = |PQ|$. Daraus folgt aber

$$|\alpha(P)\alpha(Z)| + |\alpha(Z)\alpha(Q)| = |PZ| + |ZQ| = |PQ| = |\alpha(P)\alpha(Q)|.$$

Wenn P, Q, R kollineare Punkte sind, dann liegt einer zwischen den beiden anderen. Nach dem eben Bewiesenen liegt dann auch der Bildpunkt zwischen den Bildpunkten der beiden anderen. Die Bildpunkte sind also kollinear. □

Satz

Jede Kongruenzabbildung erhält Streckenlängen und Winkelmaße.

Beweis.

Sei α eine Kongruenzabbildung.

Das Bild $\alpha(PQ)$ ist die Strecke $\alpha(P)\alpha(Q)$. Für deren Länge gilt nach Definition $|\alpha(P)\alpha(Q)| = |PQ|$. Strecke und Bildstrecke sind kongruent.

Sei $\measuredangle PSQ$ ein Winkel. Wir betrachten die Dreiecke $\triangle PSQ$ und $\triangle\alpha(P)\alpha(S)\alpha(Q)$.Da α Streckenlängen erhält, sind entsprechende Seiten dieser Dreiecke kongruent.Nach sss sind also die Dreiecke kongruent und folglich auch die Winkel $\measuredangle PSQ$ und $\measuredangle\alpha(P)\alpha(S)\alpha(Q)$. □

Bemerkung

- *Wir haben früher definiert:*

  Zwei Dreiecke heißen kongruent, wenn sie in allen drei Seiten(längen) und allen drei Winkel(maße)n entsprechend übereinstimmen.

- *Mit Hilfe von Abbildungen könnten wir auch definieren:*

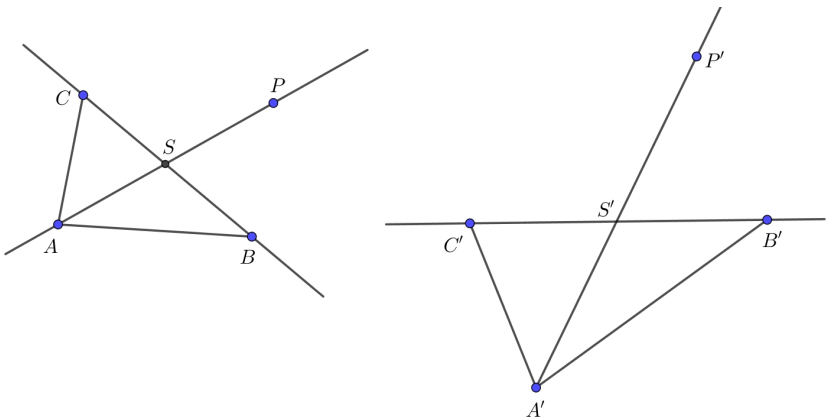
  Zwei Dreiecke heißen kongruent, wenn es eine Kongruenzabbildung der Ebene gibt, bei der das eine Dreieck das Bild des anderen Dreiecks ist.

Satz

Durch die Vorgabe dreier nicht kollinearer Punkte und ihrer Bilder ist eine Kongruenzabbildung eindeutig bestimmt.

Beweis.

Seien A, B, C drei nicht kollineare Punkte und A', B', C' ihre Bildpunkte. Weiter sei $P \neq A$ ein beliebiger Punkt der Ebene.



1. Fall: AP schneidet BC im Punkt S. S' liegt auf $B'C'$ und ist eindeutig bestimmt durch $|BS| = |B'S'|$ und $|CS| = |C'S'|$.
Da A, S, P kollinear sind, muss P' auf $g(A', S')$ liegen. Wegen $|S'P'| = |SP|$ und $|A'P'| = |AP|$ ist P' eindeutig bestimmt.

Prüfen Sie die Argumentation für verschiedene Lagen von S.

2. Fall: AP schneit BC nicht. Übungsaufgabe. □

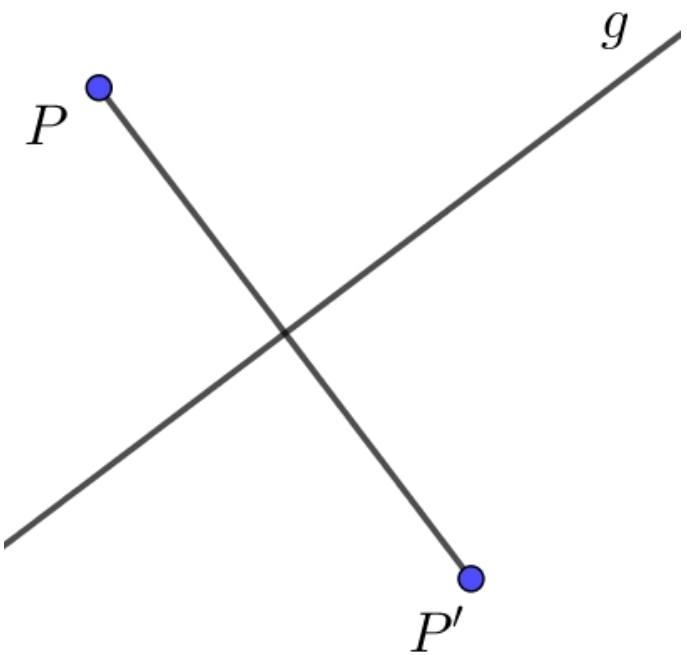
Definition

Eine Spiegelung an einer Geraden g ist eine Abbildung $\sigma = \sigma_g$ der Punkte der Ebene auf sich, für die gilt

$\sigma_g(P) = P$, falls $P \in g$.

$\sigma_g(P) = P'$, falls $P \notin g$;

mit P' so, dass g Mittelsenkrechte von PP' ist.



Bemerkung

Jede Geradenspiegelung ist zu sich selbst invers: $\sigma_g^{-1} = \sigma_g$.
Folglich $\sigma_g \circ \sigma_g = id$.

Satz

Jede Spiegelung σ_g *ist eine Kongruenzabbildung.*

Beweis.

Sei $\sigma = \sigma_g$ die Spiegelung an der Geraden g.

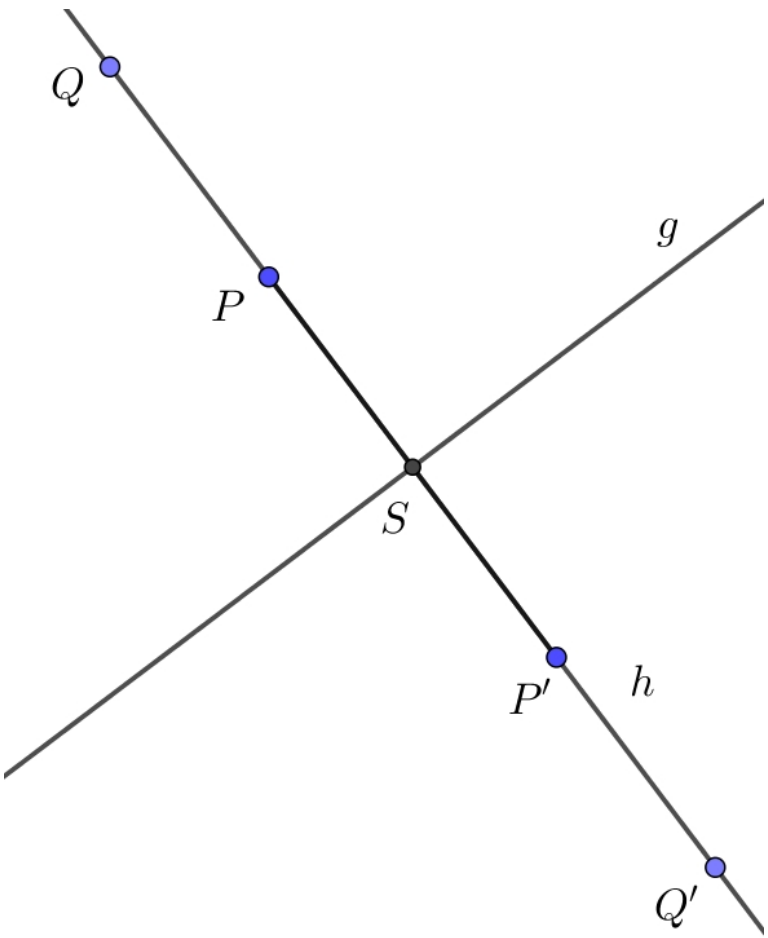
Seien P und Q zwei beliebige Punkte, und $P' = \sigma(P)$ und $Q' = \sigma(Q)$ ihre Bilder. Wir müssen zeigen $|PQ| = |P'Q'|$ und nehmen eine Fallunterscheidung nach der Lage von P und Q bezüglich g vor.

1. Fall: $P, Q \in g$. Dann ist $P' = P, Q' = Q$ und somit $|PQ| = |P'Q'|$.

Beweis.

(Fortsetzung)

2. Fall: $PQ \perp g$



- $h = g(P, Q)$ ist das Lot durch P bzw. Q auf g.
- $P', Q' \in h$.
- Sei $S = g \cap h$. Dann gilt $|P'S| = |PS|$ und $|Q'S| = |QS|$
- Daraus folgt $|PQ| = |P'Q'|$.

Prüfen Sie auch andere Lagen von P und Q auf h.

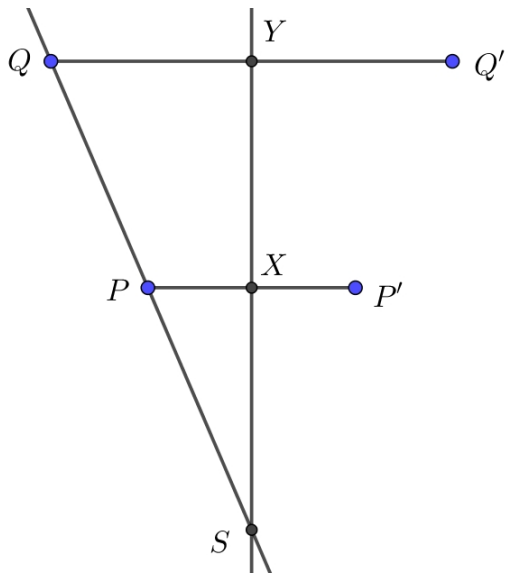
Beweis.

(Fortsetzung)

3. Fall: $PQ \| g$. Dann ist $PQQ'P'$ ein Rechteck. Warum? Also $|PQ| = |P'Q'|$.

4. Fall: $P \in g, Q \notin g$. Dann liegt P auf der Mittelsenkrechten von QQ' und mit $P = P'$ folgt $|P'Q'| = |PQ'| = |PQ|$.

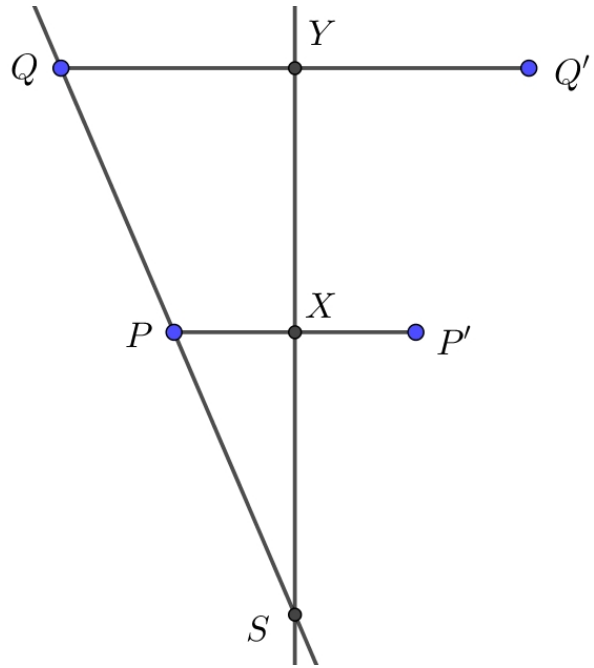
5. Fall: $P, Q \notin g, PQ \not\| g, PQ \not\perp g$. P und Q auf der gleichen Seite von g. Sei $S = g \cap g(P, Q)$.



- Nach Fall 4 $|PS| = |P'S|$ und $|QS| = |Q'S|, |PQ| = |SQ| - |SP|$
- Wären S, P', Q' kollinear, dann würde folgen $|P'Q'| = |SQ'| - |SP'| = |SQ| - |SP| = |PQ|$.

Beweis.

(Fortsetzung)



- Wir zeigen die Kollinearität:

  $\measuredangle XSP' \cong \measuredangle XSP (SWS)$;

  $\measuredangle XSP \cong \measuredangle YSQ$;

  $\measuredangle YSQ \cong \measuredangle YSQ' (SWS)$.

  Also $\measuredangle XSP' \cong \measuredangle YSQ'$ (Transitivität)

  Folglich sind S, P', Q' kollinear.

6. Fall: $P, Q \notin g, PQ \not\parallel g, PQ \not\perp g$. P und Q auf verschiedenen Seiten von g. Sei $S = g \cap g(P, Q)$. □

Aufgabe

Führen Sie den Beweis für den 6. Fall.

- Ziel: Alle Kongruenzabbildungen ordnen und beschreiben
- Ordnungsprinzip: Anzahl der Fixpunkte

Definition

Ein Fixpunkt einer Kongruenzabbildung α ist ein Punkt P mit $\alpha(P) = P$.

Beispiel

Bei einer Spiegelung an der Geraden g ist jeder Punkt der Geraden g Fixpunkt und alle anderen Punkte der Ebene sind keine Fixpunkte.

Satz

Wenn eine Kongruenzabbildung α zwei verschiedene Fixpunkte P und Q hat, dann ist jeder Punkt der Geraden $g(P, Q)$ ein Fixpunkt.

Beweis.

Sei X ein beliebiger Punkt der Geraden $g(P, Q)$. Zu zeigen ist $X' = X$.

Da Kollinearität bei einer Kongruenzabbildung erhalten bleibt, muss X' auf $g(P, Q)$ liegen.

Es gilt $|X'P| = |X'P'| = |XP|$. Also ist entweder $X' = X$ oder X' liegt auf der anderen Seite von P.

Es gilt aber auch $|X'Q| = |X'Q'| = |XQ|$. Also muss $X' = X$ sein. □

Satz

Wenn eine Kongruenzabbildung α drei nichtkollineare Fixpunkte hat, dann ist $\alpha = id$.

Mit anderen Worten: Es gibt außer der Identität keine Kongruenzabbildung, die drei Fixpunkte hat, die nicht auf einer Geraden liegen.

Beweis.

Seien P, Q, R drei nichtkollineare Fixpunkte. Nach dem vorigen Satz sind alle Punkte auf den Geraden $g(P, Q), g(P, R), g(Q, R)$ Fixpunkte.

Sei X ein beliebiger Punkt. Dann gibt es eine Gerade h durch X, die mindestens zwei der drei Geraden $g(P, Q), g(P, R), g(Q, R)$ schneidet.

Die Gerade h hat also mindestens zwei Fixpunkte. Wieder nach dem vorigen Satz ist X selbst Fixpunkt. □

Bemerkung

Wir brauchen also nur noch Kongruenzabbildungen mit kollinearen Fixpunkten zu betrachte.

Der Plan

- Wenn α (mindestens) zwei (kollineare) Fixpunkte hat, ist α eine Spiegelung.
- Wenn α genau einen Fixpunkt hat, ist α eine Verkettung von genau zwei Spiegelungen.
- Wenn α keinen Fixpunkt hat, ist α eine Verkettung von zwei oder drei Spiegelungen

Fazit

Jede Kongruenzabbildung läßt sich als Verkettung von höchstens drei Spiegelungen darstellen.

Satz

Wenn eine Kongruenzabbildung $\alpha \neq id$ mindestens zwei Fixpunkte besitzt, dann ist α eine Spiegelung.

Beweis.

Wegen $\alpha \neq id$ liegen alle Fixpunkte auf einer Geraden g. Dann ist aber jeder Punkt von g ein Fixpunkt.

Sei P ein Punkt außerhalb von g, und sei P' sein Bild.

Weiterer Beweisplan: Zeige:

(1) Die Spiegelung $\sigma = \sigma_g$ mit Achse g führt P in P' über.

(2) Die Verkettung $\alpha \circ \sigma$ hat als Fixpunkte alle Punkte auf g und (mindestens) den Punkt P.

(3) Es folgt $\alpha \circ \sigma = id$. Die Umkehrabbildung ist eindeutig bestimmt. Also ist $\alpha = \sigma^{-1} = \sigma$ eine Spiegelung.

Details: Übungsaufgabe. □

Lösung zu (1):

Betrachte einen beliebigen Punkt $F \in g$. Dann gilt

$$|P'F| = |P'F'| = |PF|.$$

Daraus folgt, dass g die Mittelsenkrechte von PP' ist. Also führt die Spiegelung an g den Punkt P in den Punkt P' über.

Satz

Wenn eine Kongruenzabbildung genau einen Fixpunkt hat, dann ist sie eine Verkettung von genau zwei Spiegelungen.

Beweis.

Sei P der einzige Fixpunkt der Kongruenzabbildung α. Sei $Q \neq P$ ein Punkt, und sei $Q' = \alpha(Q)$. Dann gilt $|PQ'| = |PQ|$.

Sei σ die Spiegelung an der Winkelhalbierenden von $\measuredangle QPQ'$. Dann ist $\sigma \circ \alpha$ eine Kongruenzabbildung, die P und Q als Fixpunkte hat.

Nach den vorigen Sätzen gibt es zwei Möglichkeiten:

1. $\sigma \circ \alpha = id$. Dann ist $\alpha = \sigma^{-1} = \sigma$ eine Spiegelung:
Widerspruch, weil α genau einen Fixpunkt hat!

2. $\sigma \circ \alpha = \sigma_2$, wobei σ_2 die Spiegelung an $g(P, Q)$ ist. Dann ist $\alpha = \sigma^{-1} \circ \sigma_2$ eine Verkettung von zwei Spiegelungen. □

Aufgabe

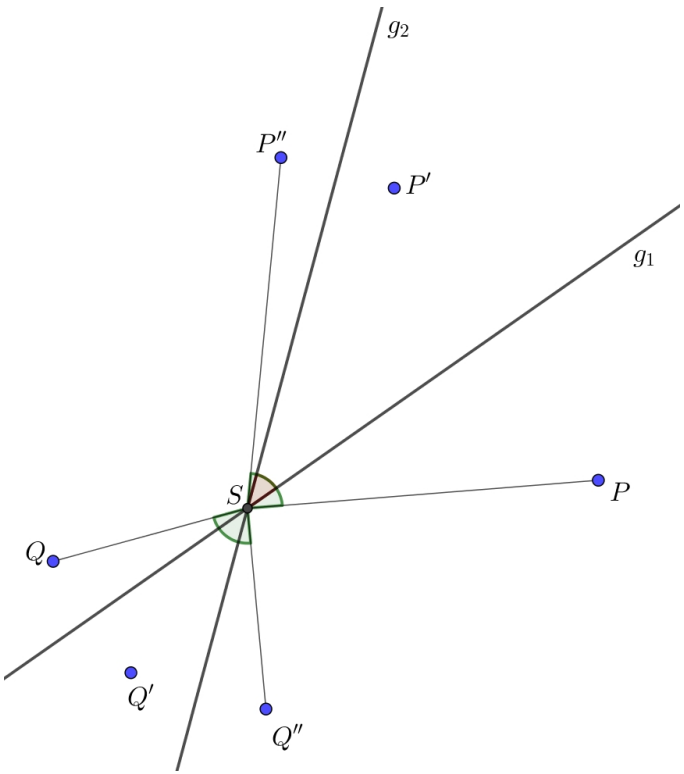
Zeichnen Sie zwei sich schneidende Geraden g_1 und g_2. Spiegeln Sie zwei beliebige Punkte nacheinander an diesen Geraden.

Welche gemeinsamen Eigenschaften haben die Bildpunkte?

Satz

Gegeben seien zwei Geraden g_1 und g_2, welche sich unter einem Winkel α in S schneiden. Dann ist die Doppelspiegelung $\sigma_2 \circ \sigma_1$ eine Drehung um 2α mit dem Drehzentrum S.

Beweis.



Zeichnen Sie Hilfslinien ein und kommentieren Sie das Bild.

Satz

Jede Kongruenzabbildung ohne Fixpunkt ist Verkettung von höchstens drei Spiegelungen.

Beweis.

Sei P ein beliebiger Punkt und sei $P' = \alpha(P)$. Mit Hilfe einer Spiegelung σ kann man P' auf P abbilden. Dann ist $\sigma \circ \alpha$ eine Kongruenzabbildung mit mindestens einem Fixpunkt, denn $\sigma \circ \alpha(P) = \sigma(\alpha(P)) = \sigma(P') = P$, also nach den vorigen Sätzen eine Verkettung von höchstens zwei Spiegelungen. Also ist α eine Verkettung von höchstens drei Spiegelungen. □

Hauptsatz

Jede Kongruenzabbildung läßt sich als Verkettung von höchstens drei Spiegelungen darstellen.

Aufgabe

Zeichnen Sie zwei parallele Geraden g_1 und g_2. Spiegeln Sie zwei beliebige Punkte P und Q nacheinander an diesen Geraden.

Welche gemeinsamen Eigenschaften haben die Bildpunkte? Was ist das Bild der Strecke PQ?

Satz

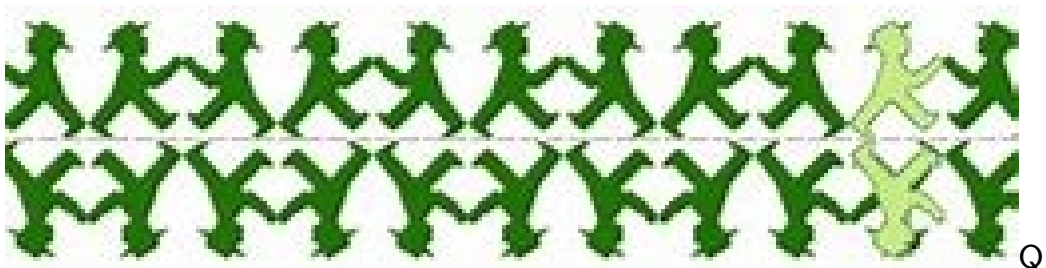
Jede Verschiebung ist eine Verkettung von zwei Spiegelungen, deren Spiegelachsen parallel sind.

Definition

Die Verkettung einer Spiegelung mit einer Verschiebung in Richtung der Spiegelachse nennt man eine Schubspiegelung oder Gleitspiegelung.

Aufgaben

- *Was passiert, wenn man die Reihenfolge von Spiegelung und Verschiebung vertauscht?*
- *Wie viele Fixpunkte hat eine Gleitspiegelung?*
- *Durch die Verkettung von wie vielen Spiegelungen kann eine Gleitspiegelung dargestellt werden?*



Quelle:

http://www.matheprisma.uni-wuppertal.de/Module/Bandorn/pages/node16.htm