

Daten und Zufall 1

Dr. Elke Warmuth

Sommersemester 2018

Wettervorhersage Zossen

heute	morgen	4 Tage	8 Tage	16 Tage	App 
Wetter		Wind	Niederschlag	Sonne / UV	

Mo, 13.02.
heute

max 2°
min -7°



Vormittag



Nachmittag



Abend/Nacht

 9 Std.

 10 %

Di, 14.02.
morgen

max 6°
min -7°



Vormittag



Nachmittag



Abend/Nacht

 9 Std.

 10 %

15.02.
Mittwoch

max 9°
min -5°



Vormittag



Nachmittag



Abend/Nacht

 9 Std.

 10 %

16.02.
Donnerstag

max 10°
min -3°



Vormittag



Nachmittag



Abend/Nacht

 7 Std.

 70 %

Warum Stochastik in der Grundschule?

Aufgabe

Finden Sie Argumente für Stochastik in der Grundschule

- Umwelterschließung
- Wahrscheinlichkeitsbegriff braucht Zeit
- Interesse der Kinder
- Bildungsstandards

Berliner Rahmenlehrplan ab 2017 – Niveaubänder, S. 13

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Niveau
A			B		C			D		E	BOA
A		B		C		D		E		F	BBR
A		B		C		D		E		F	EBBR
A		B		C		D		E		F	MSA
	B		C		D		E		F	G	Niveau zum Übergang in die 2-jährige Qualifikationsphase

Für uns relevant: Bereiche A bis D

BBR - Berufsbildungsreife in Klassenstufe 9

EBBR - erweiterte Berufsbildungsreife in Klassenstufe 10

MSA - mittlerer Schulabschluss in Klassenstufe 10

MSA GO - mittlerer Schulabschluss mit Berechtigung zum Übergang in die gymnasiale Oberstufe in Klassenstufe 10

BOA/BBR - berufsorientierender Abschluss in Klassenstufe 10 für Schüler mit sonderpädagogischem Förderbedarf Lernen / der Berufsbildungsreife gleichwertige Abschluss in Klassenstufe 10 für Schüler mit sonderpädagogischem Förderbedarf Lernen

Leitidee Daten und Zufall

„Die Schülerinnen und Schüler sammeln und dokumentieren Daten, stellen sie grafisch dar, fassen sie mithilfe statistischer Kennwerte numerisch zusammen, beschreiben und interpretieren sie.

Ausgehend von Wahrscheinlichkeitsschätzungen und experimentellen Untersuchungen werden Zufallserscheinungen in alltäglichen Situationen beschrieben. Auf der Basis von kombinatorischen Überlegungen sowie durch Verfahren und Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung können Zufallserscheinungen verstanden sowie qualitativ und quantitativ erfasst werden. Auf diese Weise gelangen die Lernenden zu fundierten und kontrollierten Urteilen in realen Entscheidungssituationen und entwickeln ein grundlegendes Verständnis für Simulationen und Prognosen.“

Berliner Rahmenlehrplan ab 2017



[L5] Daten und Zufall

Daten			
	Daten erheben	Daten darstellen	Statistische Erhebungen auswerten
Die Schülerinnen und Schüler können			
A	Objekte mit vorgegebenen Eigenschaften finden	Objekte sortieren	Anzahlen sortierter Objekte vergleichen
B	Daten sammeln	Daten in vorgegebener Form darstellen	Informationen aus Datendarstellungen ablesen
C	Daten sammeln und strukturieren	verschiedene Darstellungsformen für Daten nutzen	Informationen/Kennwerte aus verschiedenen Darstellungsformen vergleichen
D	Daten sammeln und strukturieren (auch Messwerte)	Daten darstellen (auch Messwerte)	weitere Kennwerte von Datenerhebungen bestimmen
E	statistischen Erhebungen nach Vorgaben planen und durchführen	Daten darstellen (auch Kreisdiagramme)	verschiedene Kennwerte zueinander in Beziehung setzen
F	statistische Erhebungen planen und durchführen	Daten darstellen (auch mithilfe von Tabellenkalkulation)	statistische Erhebungen untersuchen
G	statistische Erhebungen unter Nutzung von technischen Medien planen und durchführen	Daten präsentieren	statistische Erhebungen kritisch bewerten
H	---	---	verschiedene Kennwerte interpretieren

Berliner Rahmenlehrplan ab 2017

Zählstrategien und Wahrscheinlichkeiten		
Zählstrategien anwenden	Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen bestimmen	
Die Schülerinnen und Schüler können		
A	verschiedene Anordnungen herstellen	das Zufallsgerät Würfel im Spiel erproben
B	Lösungen zu kombinatorischen Fragestellungen durch Aufzählen darstellen	einfache Zufallsexperimente durchführen und Ergebnisse ermitteln
C	Lösungen von kombinatorischen Fragen systematisch darstellen	Ergebnisse bei einstufigen Zufallsexperimenten beschreiben und nach gemeinsamen Eigenschaften zusammenfassen
D	Lösungen zu kombinatorischen Fragen begründen	die relative Häufigkeit von Ergebnissen bei einstufigen Zufallsexperimenten und Spielen inhaltlich einschätzen
E	Baumdiagramme erstellen und nutzen	Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen bei zweistufigen Zufallsexperimenten vergleichen
F	erworbene Kompetenzen vertiefend auf weitere kombinatorische Fragestellungen anwenden	erworbene Kompetenzen vertiefend auf weitere Zufallsexperimente anwenden
G	kombinatorische Überlegungen zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten nutzen	Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen bestimmen (auch bei mehrstufigen Zufallsexperimenten)
H	Zählstrategien zum Bestimmen von Anzahlen einsetzen	Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen ermitteln und vergleichen (auch auf der Basis von Simulationen)

- Daten
- Zählstrategien und Wahrscheinlichkeiten

- ziemlich sinnlose Einteilung
- Leitidee heißt Daten **und** Zufall
- unangemessene Hervorhebung des Zählens

Aspekte der Entwicklung stochastischen Denkens bei Kindern I

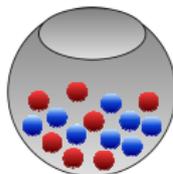
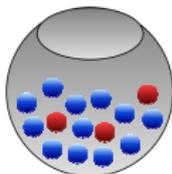
- Piaget/Inhelder (1951): Zufallsidee entwickelt sich ab 7 Jahren, quantitativer Wahrscheinlichkeitsbegriff ab 11-12 Jahren
- Yost/Siegel/Andrews (1962): Kinder ab 4 Jahren haben erste Ansätze zum Erfassen von Wahrscheinlichkeit
- Fischbein/Pampu/Mânzat (1970):
 - Chancenvergleiche bei Urnen mit Entscheidung
 - verschiedene kurze Instruktionen ohne Bruchrechnung
 - kleine Belohnung für Mindestanzahl richtiger Antworten
 - ein Befund: 9- bis 10-Jährige operieren korrekt mit Chancen/Wahrscheinlichkeiten

Aus welchem Topf möchtest du ziehen?

Es gibt verschiedene Töpfe mit roten und blauen Kugeln. Bei jeder Aufgabe hast du die Auswahl zwischen zwei verschiedenen Töpfen. Stell dir vor, du darfst dir einen Topf auswählen und ohne hineinzuschauen, eine Kugel daraus ziehen. Ist sie rot, bekommst du einen Punkt. Ist sie blau, bekommst du nichts.

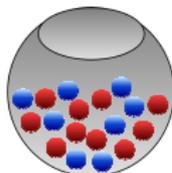
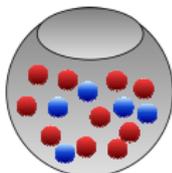
Entscheide dich für einen Topf, kreuze deine Antwort an und überlege dir eine Begründung für deine Entscheidung.

Aufgabe 1

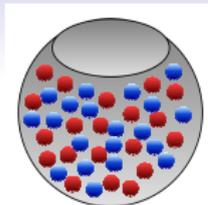
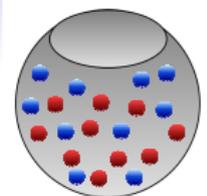


Antwortmöglichkeiten	Meine Antwort
Beim linken Topf ist meine Gewinnchance größer	
Beim rechten Topf ist meine Gewinnchance größer	
Die Gewinnchance ist bei beiden Töpfen gleich groß	

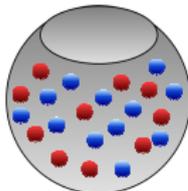
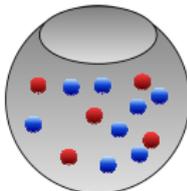
Aufgabe 2



Antwortmöglichkeiten	Meine Antwort
Beim linken Topf ist meine Gewinnchance größer	
Beim rechten Topf ist meine Gewinnchance größer	
Die Gewinnchance ist bei beiden Töpfen gleich groß	

Aufgabe 3

Antwortmöglichkeiten	Meine Antwort
Beim linken Topf ist meine Gewinnchance größer	
Beim rechten Topf ist meine Gewinnchance größer	
Die Gewinnchance ist bei beiden Töpfen gleich groß	

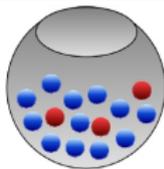
Aufgabe 4

Antwortmöglichkeiten	Meine Antwort
Beim linken Topf ist meine Gewinnchance größer	
Beim rechten Topf ist meine Gewinnchance größer	
Die Gewinnchance ist bei beiden Töpfen gleich groß	

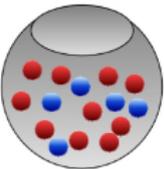
Aufgabe 5

- Tragt zu jeder Aufgabe die Ergebnisse der ganzen Klasse zusammen und ordnet sie so, dass ihr einen Überblick bekommt. Diskutiert eure Ergebnisse und eure Begründungen und findet gemeinsam die richtigen Antworten.

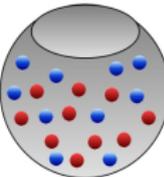
$$\frac{3}{15}$$



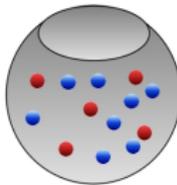
$$\frac{10}{15}$$



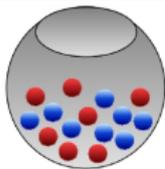
$$\frac{10}{20}$$



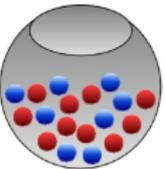
$$\frac{5}{13}$$



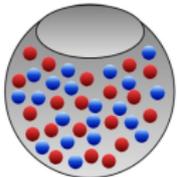
$$\frac{7}{15}$$



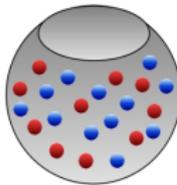
$$\frac{10}{18}$$



$$\frac{20}{40}$$



$$\frac{10}{22}$$



Aufgabe 6

- * Stellt euch aus Spielmaterial zwei Töpfe mit Kugeln/Legosteinen wie in Aufgabe 4 zusammen. Jeder darf zweimal aus jedem Topf ziehen, natürlich ohne hineinzuschauen. Die gezogene Kugel wird zurückgelegt.

Notiert die Farbe der gezogenen Kugel in einer Tabelle:

	linker Topf 5 rote, 8 blaue	rechter Topf 10 rote, 12 blaue
rot		
blau		
Punkte		

Schaut euch jetzt noch einmal eure Antworten zur Aufgabe 4 an. Passen die Ergebnisse eurer Ziehungen zu eurer Entscheidung, welcher Topf der mit den größeren Chancen ist?

Aspekte der Entwicklung des stochastischen Denkens bei Kindern II

- Hawkins/Kapadia (1984): intuitive Vorstellungen typischerweise subjektiv und nicht kohärent
- Wollring (1994): animistische Vorstellungen („im Würfel sitzt ein kleiner Zwerg“)
- Sill (1993): umgangssprachliche Bedeutung: Zufall als etwas Seltenens, Unverhofftes, (meist) Glückliches, aber auch „dummer Zufall“
- Garfield/Ben-Zvi (2007) Prinzipien:
 - Wissen konstruieren (alte Konzepte ersetzen)
 - Kleingruppenaktivitäten (kommunizieren)
 - experimentieren, anwenden in neuen Situationen (herausfordern)
 - Fehler fruchtbar machen (auch experimentelle Erfahrungen)

Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in der Schule

- intuitiven Wahrscheinlichkeitsbegriff unterstellen
- qualitative Urteile: sicher – möglich, aber nicht sicher – unmöglich
- Vergleiche: gleiche Chancen – wahrscheinlicher als
- quantitativ: Häufigkeitsinterpretation und Laplace-Modell
- Modell: Ergebnisse, Ergebnismenge, Ereignisse
- in Modellen Wahrscheinlichkeiten berechnen, interpretieren, Eigenschaften untersuchen
Rechnungen bestätigen die Intuition oder geben Anlass, sie zu überprüfen
- Erweiterung durch Pfadregeln, Unabhängigkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit

Wichtig:

- kumulativer Aufbau: Bezug nehmen auf und Anknüpfen an vorige Stufe
- Verständnis für Begriffe und Konzepte, nicht nur die Regel kennen
Beispiel: arithmetisches Mittel
- Vernetzen der Begriffe und Konzepte
Beispiel: Laplace-Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit, Additivität und 1. Pfadregel, Verteilen und 2. Pfadregel
- Interpretation von Rechenergebnissen
Beispiel: Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswerte, bedingte Wahrscheinlichkeiten (Bayessche Formel)

Stochastik in der Grundschule

- kein eigenständiges Stoffgebiet
- integrieren in alle Stoffgebiete des Mathematikunterrichts
- integrieren in Sachrechnen
- nicht auf Glücksspiele beschränken (gilt nicht nur für Grundschule)
- Beispiele aus der Lebenswelt der Kinder
- verschiedene Lösungswege akzeptieren und diskutieren (gilt auch nicht nur für Grundschule)
- auch enaktiv arbeiten

Berliner Rahmenlehrplan seit 2017

<http://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/rlp-online/startseite/>

	Daten		
	Daten erheben	Daten darstellen	Statistische Erhebungen auswerten
A	Erkennen von Objekten mit bestimmten Eigenschaften wie Farbe und Form	Sortieren von Objekten mit gleichen Eigenschaften wie Farbe, Form, Größe	Vergleichen von sortierten Objektmengen bezüglich ihrer Anzahl (z. B. weniger rote Kreise als blaue Kreise)
B	Sammeln von Daten anhand von vorgegebenen alltagsnahen Fragestellungen (z. B. Anzahl der Geschwister)	Darstellen von Daten aus Bildern oder der unmittelbaren Lebenswirklichkeit in vorgegebenen Tabellen Darstellen von Einzeldaten mit Würfeltürmen und in vorgegebenen Säulendiagrammen (z. B. durch Ausmalen von Kästchen)	Lesen von Strichlisten und Tabellen (mit einer Eigenschaft) Ablesen und Nennen von Informationen aus Listen, Diagrammen und Kalendern

C	<p>Sammeln von Daten (z. B. durch Befragungen, Recherchen oder Experimente)</p> <p>Ordnen von gesammelten Daten nach vorgegebenen Merkmale (z. B. Junge/Mädchen)</p>	<p>Darstellen von Datenmengen (auch in Balkendiagrammen) Wechsel von Darstellungs- formen (Tabelle, Diagramm, Text)</p>	<p>Ablesen, Vergleichen und in Beziehung setzen einzelner Werte einer Darstellung</p> <p>Nennen von seltenstem und häufigstem Wert bei Häufigkeitsverteilungen</p> <p>Vergleichen der Darstellung und des Informationsgehalts von Urlisten, Tabellen, Diagrammen und Schau- bildern (auch zum gleichen Sachverhalt)</p>
D	<p>Erfassen und Strukturieren von selbst erhobenen Messwerten (auch Dezimalzahlen)</p>	<p>Darstellen von Messwerten in Tabellen und Diagrammen</p> <p>Aufbereiten und Präsentieren von Daten in geeigneten Darstellungsformen</p>	<p>Ermitteln und Vergleichen von Kennwerten (auch Minimum, Maximum und Spannweite) sowie Informationen aus verschiedenen Darstellungen</p>

Zählstrategien und Wahrscheinlichkeiten		
	Zählstrategien anwenden	Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen bestimmen
A	Herstellen unterschiedlicher Anordnungen mit Material (z. B. Bausteintürme, Anziehpuppen)	Nutzen des Spielgeräts Würfel mit seinen verschiedenen möglichen Ergebnissen
B	handelndes oder bildliches Ermitteln von Lösungen zu kombinatorischen Fragestellungen und Darstellen als Aufzählung Nutzen der Strategie „Probieren und Sortieren“, um kombinatorische Fragestellungen zu lösen	Durchführen von Experimenten mithilfe symmetrischer Zufallsgeräte (z. B. Würfel, Münzen, Wendepfättchen) und Dokumentieren der Ergebnisse Nutzen der Wörter „sicher“, „möglich“ und „unmöglich“ für die Beschreibung von Ergebnissen

Neuer RLP, Themen und Inhalte, S. 59

C	<p>systematisches Durcharbeiten von Möglichkeiten und entsprechende Auswertung zu kombinatorischen Fragestellungen</p> <p>Auswählen zwischen verschiedenen Möglichkeiten der Darstellung von Lösungen zu kombinatorischen Fragestellungen (z. B. Anordnungen von Bildern, Worten oder Symbolen in Listen, Tabellen oder vorgegebenen Baumdiagrammen)</p>	<p>Planen, Durchführen und systematisches Auswerten von einfachen Zufallsexperimenten (z. B. mit Glücksrädern, Urnen)</p> <p>Zusammenfassen von Ergebnissen mit gleichen Eigenschaften bei einfachen Zufallsexperimenten</p> <p>Angaben und Vergleichen der absoluten Häufigkeit von Ergebnissen bei Zufallsexperimenten (z. B. in der Form „kommt häufiger vor“)</p> <p>Beschreiben von Gewinnchancen bei Spielen (gleiche Chance, größere Chance) auf der Basis der Anzahl von Gewinn- und Verlierermöglichkeiten</p> <p>Beurteilen von Vorgängen der eigenen Erfahrungswelt mit „zufällig“ und „nicht zufällig“</p>
D	<p>systematisches Durcharbeiten und Begründen der Vollständigkeit einer Lösung bei kombinatorischen Fragestellungen (z. B. durch systematisches Aufzählen der Möglichkeiten)</p>	<p>zielgerichtetes Verändern von Bedingungen bei Zufallsexperimenten und Spielen sowie Beschreiben der Auswirkung</p> <p>Angaben und Vergleichen der relativen Häufigkeit von Ergebnissen bei einstufigen Zufallsexperimenten mithilfe der Bruchdarstellung</p>

- Stell Dir vor, Du würfelst mit einem Spielwürfel 5 mal und addierst die Zahlen. (AB II)

Die kleinstmögliche Summe ist:

Die größtmögliche Summe ist:

- Beim Würfeln mit zwei Spielwürfeln wird die Summe 7 wesentlich häufiger gewürfelt als die Summe 12.

Woran liegt das?(AB III)

.....

.....

.....

.....

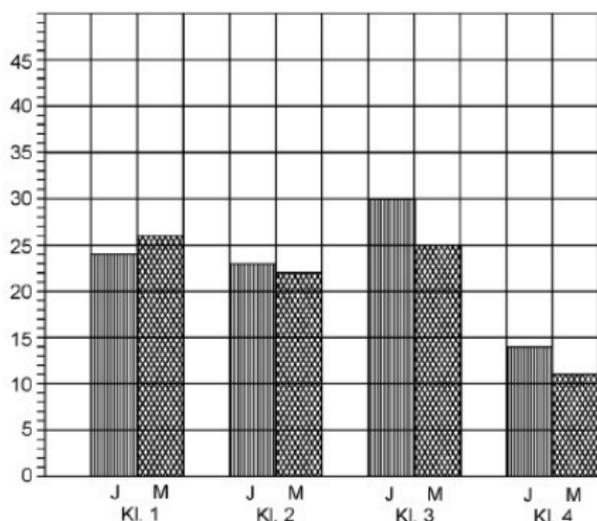
.....

Die Tabelle zeigt das Alter von Jungen und Mädchen einer 4. Klasse.

Alter	Anzahl der Jungen	Anzahl der Mädchen
9	6	8
10	9	3
11	2	0

1. Wie viele Jungen sind in der 4. Klasse? (AB I)
2. Wie viele Kinder besuchen diese 4. Klasse? (AB I)
3. Wie viele Kinder sind 9 Jahre alt? (AB I)
4. Wie viele Kinder sind älter als 9 Jahre? (AB I)
5. Zeichne zu der Tabelle ein Streifendiagramm. (AB II)
Einteilung vorgegeben: Alter und J/M

6. Das Streifendiagramm stellt die Anzahl der Jungen (J) und Mädchen (M) der Waldschule dar. (AB II)



KMK-Beispiel Grundschule

Streifendiagramm?

Fülle zu diesem Streifendiagramm die Tabelle aus.

Klassenstufe	Jungen	Mädchen	gesamt
Klasse 1			
Klasse 2			
Klasse 3			
Klasse 4			
gesamt			

KMK-Beispiel Grundschule

Du spielst mit Freunden mit einem Spielwürfel. Jeder der Spieler darf sich eine Regel aussuchen, nach der er seine Punkte bekommt.
(AB III)

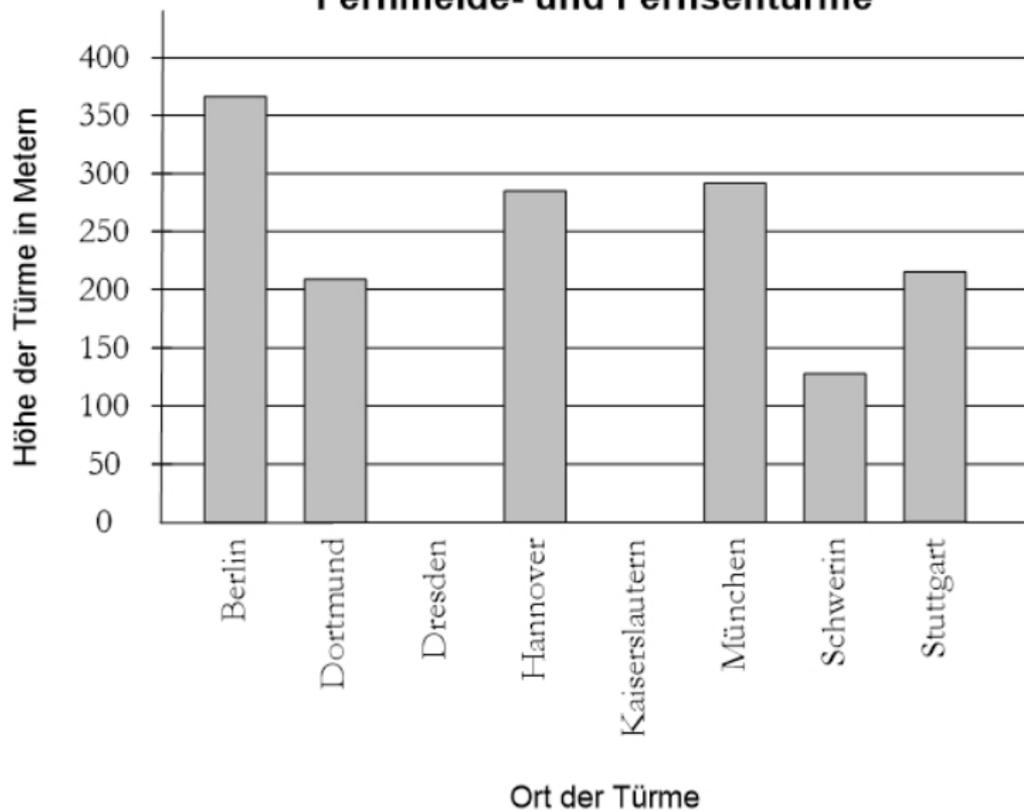


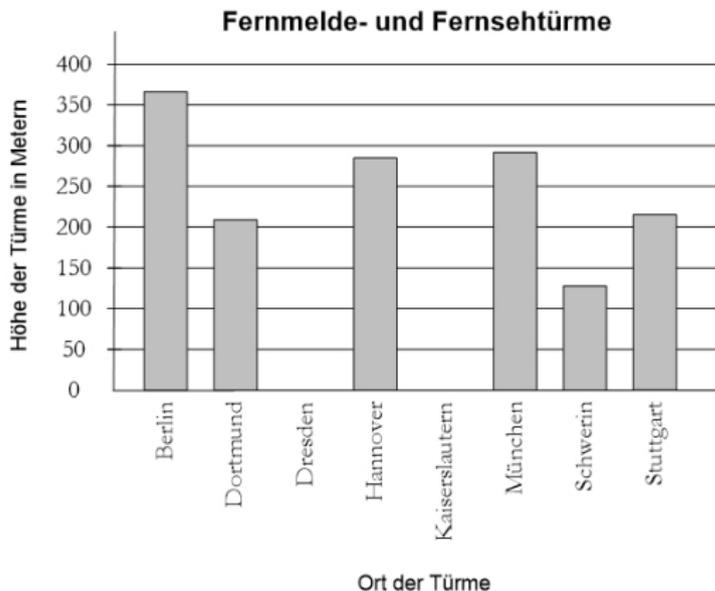
KMK-Beispiel Grundschule

Du möchtest möglichst viele Punkte haben.
Welche Regel würdest du wählen?

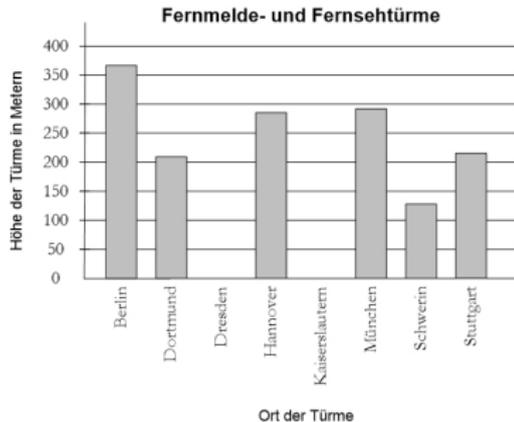
Warum?

Fernmelde- und Fernsehtürme





- 1 Der Fernsehturm in Dresden ist 250 m hoch. Zeichne seine Höhe in das Diagramm ein.
- 2 Der Fernsehturm in Kaiserslautern ist etwa so hoch wie der Fernsehturm in Schwerin. Zeichne seine Höhe in das Diagramm ein.
- 3 Notiere, welche Fernsehtürme größer als 200 m und kleiner als 250 m sind.



Teilaufgabe 4:

Ist der Fernsehturm in diesen Städten höher als 250 m und niedriger als 350 m?

Kreuze jeweils an.

	stimmt	stimmt nicht
Berlin	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Dortmund	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Hannover	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
München	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Kreuze jeweils an.

	sicher	möglich, aber nicht sicher	unmöglich
Nach Mittwoch kommt Donnerstag.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Meine Mutter ist jünger als ich.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Weihnachten ist in diesem Jahr im August.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Wenn ich fünf Mal würfele, bekomme ich mindestens einmal eine Zwei.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

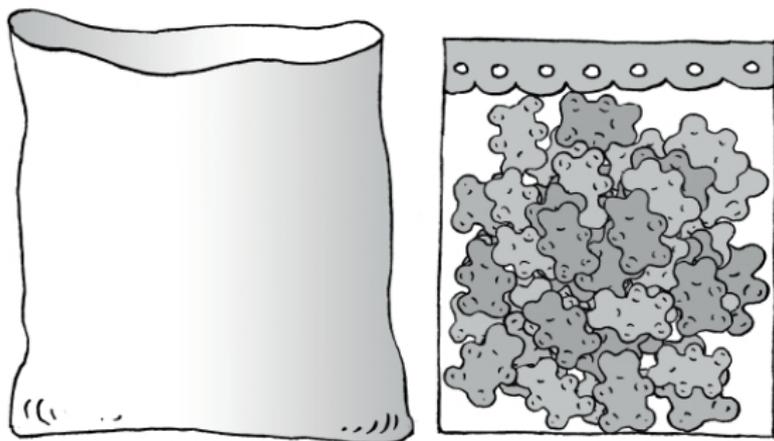
Anna fädelt zwei schwarze (S), eine weiße (W)
und eine gestreifte (G) Perle auf.

Die schwarzen Perlen liegen **nicht**
nebeneinander.

Notiere alle Möglichkeiten.

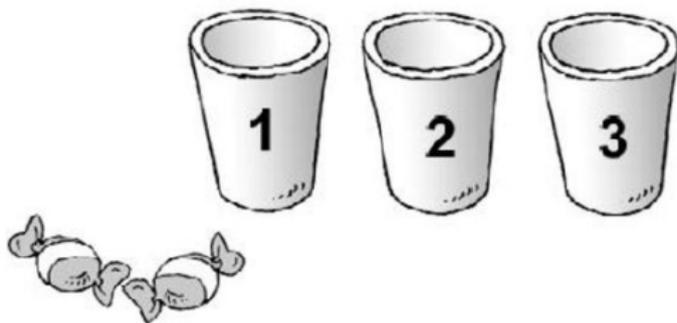
S, W, G, S _____ _____
_____ _____ _____





Du füllst 10 Gummibärchen in einen Beutel. Sie können rot oder gelb sein. Dein Partner darf mit verbundenen Augen zwei Gummibärchen herausnehmen. Wie musst du den Beutel füllen, damit dein Partner die besten Chancen hat, ein gelbes und ein rotes Gummibärchen zu ziehen?

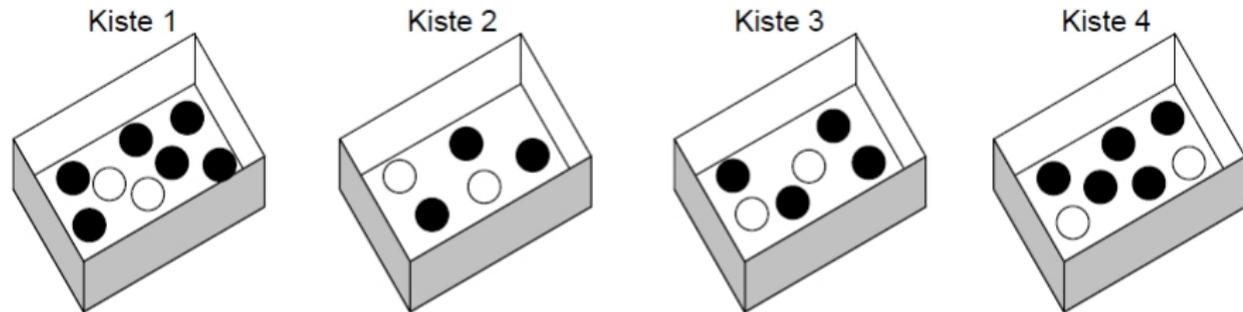
Ich fülle den Beutel mit _____ roten und _____ gelben Gummibärchen.



Leo versteckt zwei Bonbons unter drei Bechern. Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat er, die Bonbons zu verstecken?

Es gibt _____ Möglichkeiten.

Aufgabe 6



Du nimmst mit geschlossenen Augen eine Kugel aus einer Kiste. Sie soll weiß sein.
Bei welcher Kiste ist deine Chance am größten?

Bei Kiste _____

Begründe.

Weitere Quellen

- Fischbein, E.; Pampu, I.; Mânzat, I.: Comparison of Ratios and the Chance Concept in Children. In: Child Development, 41, 1970, 377–389.
- Garfield, J., & Ben-Zvi, D.: How students learn statistics revisited: A current review research on teaching and learning statistics. International Statistical Review, 75(3), 2007, 372–396.
- Hawkins, A.S.; Kapadia, R.: Children's conceptions of probability: a psychological and pedagogical review. In: Education Studies in Mathematics, 15, 1984, 349-77.
- Piaget, J.; Inhelder, B.: The Origin of the Idea of Chance in Children. London: Routledge Kegan Paul, 1951.
- Sill, H.-D.: Zum Zufallsbegriff in der stochastischen Allgemeinbildung. In: Zentralbl. Didaktik Math. (ZDM) 25(1993)2, 84–88.
- Wollring, B.: Qualitative empirische Untersuchungen zum Wahrscheinlichkeitsverständnis bei Vor- und Grundschulkindern. Universität Münster: Habilitationsschrift, 1994.
- Yost, P.A.; Siegel, A.E.; Andrews, J.M.: Nonverbal probability judgments by young children. In: Child Development 33, 1962, 769–780.