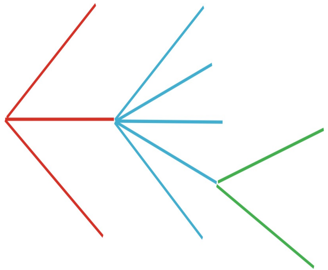
Zählalgorithmus = Produktregel der Kombinatorik = allgemeines Zählprinzip

Beispiel

Wie viele Menüs kann man aus 3 Vorspeisen, 5 Hauptgerichten und 2 Nachspeisen zusammenstellen, wenn Geschmacksfragen keine Rolle spielen?

3 Vorspeisen, 5 Hauptgerichte und 2 Nachspeisen

Veranschaulichung im Baumdiagramm:



Lösung: $3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$

Beispiel

Bei einem Pferderennen starten 7 Pferde.

Beim „Großen Einlauf“ wettet man auf die drei Erstplatzierten in der richtigen Reihenfolge. Ergebnis: Tripel

Beim „Kleinen Einlauf“ wettet man auf die drei Erstplatzierten ohne Angabe der Reihenfolge. Ergebnis: Teilmenge

Wie viele Möglichkeiten für den Großen Einlauf gibt es? Wie viele sind es für den Kleinen Einlauf?

Lösung:

1. Platz	2. Platz	3. Platz
7 Mögl.	jeweils 6 Mögl.	jeweils 5 Mögl.

Insgesamt $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ Möglichkeiten für den Großen Einlauf

Sei K die unbekannte Anzahl der möglichen Kleinen Einläufe.

Der Kleine Einlauf $\{1, 4, 6\}$ sei fixiert. Wie viele Große Einläufe kann man daraus erzeugen?

Für den 1. Platz gibt es 3 Möglichkeiten, für den 2. jeweils 2 und der 3. steht dann fest. Also gibt es $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ Möglichkeiten, aus diesem Kleinen Einlauf einen Großen Einlauf zu erzeugen.

Das gilt für jeden Kleinen Einlauf und auf diese Weise erzeugen wir ohne Dopplungen alle Großen Einläufe.

Folglich muss gelten

$$\begin{aligned} K \cdot 3! &= 7 \cdot 6 \cdot 5 \\ K &= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = \binom{7}{3} = 35 \end{aligned}$$

Zählalgorithmus

Eine Auswahl werde in k aufeinanderfolgenden Schritten vollzogen. Das Ergebnis ist ein k-Tupel. Gibt es dabei

im 1. Schritt		n_1 Möglichkeiten,
im 2. Schritt	**jeweils**	n_2 Möglichkeiten,
...	...	...
im k-ten Schritt	**jeweils**	n_k Möglichkeiten,

so gibt es insgesamt $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ Möglichkeiten der Auswahl.

Gedankliches Zerlegen eines Vorgangs in Teilvorgänge, z.B. 3 Würfel gleichzeitig werfen $\simeq$ 1 Würfel dreimal werfen

Anzahl der Anordnungen einer n-elementigen Menge (Permutationen)

Elemente (Kugeln, Karten, Schüler, Lehrer, ...) mit den Nummern $1, 2, \ldots, n$ sollen in einer Reihe angeordnet werden. Es gibt

für den 1. Platz		n Möglichkeiten,
für den 2. Platz	**jeweils**	$n-1$ Möglichkeiten,
...	...	...
für den n-ten Platz	**jeweils**	1 Möglichkeit.

Es gibt folglich $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ Möglichkeiten der Anordnung.

$n!$ wächst rasant, z. B. $50! \approx 3 \cdot 10^{64}$

Anzahl der Anordnungen von k Elementen einer n-elementigen Menge (Variationen)

Aus einer Menge von Elementen (Kugeln, Karten, Schüler, Lehrer, ...) mit den Nummern $1, 2, \ldots, n$ sollen k ausgewählt und in einer Reihe angeordnet werden. Es gibt

für den 1. Platz		n Möglichkeiten,
für den 2. Platz	**jeweils**	$n-1$ Möglichkeiten,
...	...	...
für den k-ten Platz	**jeweils**	$n-(k-1)$ Möglichkeiten.

Es gibt folglich $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))$ Möglichkeiten der Anordnung.

Spezialfall $k = n$.

Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge (Kombinationen)

Aus einer Menge von Elementen mit den Nummern $1, 2, \ldots, n$ sollen k ausgewählt werden. (Ohne Beachtung der Reihenfolge!).

Beispiel: $M = \{1, 2, 3\}$ und $k = 2$. Aus jeder Teilmenge entstehen $k! = 2! = 2$ Anordnungen:

$$\{1,\ 2\} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} 12 \\ \\ 21 \end{matrix}$$

Auf diese Weise werden auch alle Anordnungen restlos und ohne Überschneidungen erfasst.
„Schäferprinzip“

Folglich gilt:

Anzahl der Anordnungen = Anzahl der Teilmengen $\cdot k!$

bzw.

Anzahl der Teilmengen = Anzahl der Anordnungen : $k!$

Anzahl von Teilmengen

Es gibt

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

k-elementige Teilmengen einer n-elementigen Menge.

$\binom{n}{k}$ **ist für Sek II Einmaleins**

Aufgabe

Ein fairer Würfel wird 6-mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Sechs fällt?

Lösung:

- Ergebnismenge $\Omega = \{(w_1, w_2, \dots, w_6) : w_k \in \{1, 2, \dots, 6\}\}$
  Annahme: alle Ergebnisse gleichwahrscheinlich – warum?
  Ω hat $6^6 = 46656$ Elemente
- Ereignis A: mindestens eine Sechs
  Ereignis $\bar{A} =?$
  $|\bar{A}| = 5^6 = 15625$
- $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{15625}{46656} \approx 0,67$

Aufgabe

Was können Sie über die Wkeit für genau eine Sechs sagen?

Aufgabe

10 Personen stoßen miteinander an. Wie oft klingen die Gläser?

Lösung: $\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45$-mal.

Beispiel

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter n zufällig ausgewählten Personen mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben?

Fächermodell:

1	2	3	...	
				365

Personen $\to$ Fächer

- Ergebnismenge $\Omega = \{(f_1, f_2, \dots, f_n) : f_k \in \{1, 2, \dots, 365\}\}$
- **Annahme**: alle Tage gleichberechtigt als Geburtstage, folglich alle n-Tupel gleichwahrscheinlich
- Ω hat 365^n Elemente

1	2	3	...	
				365

Ereignis A_n: mindestens zwei Personen haben am gleichen Tag Geburtstag

Gegenereignis $\bar{A}_n$: alle Personen haben an verschiedenen Tagen Geburtstag, d. h. kein Fach wird doppelt belegt

$$\begin{aligned} |\bar{A}_n| &= 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - (n-1)) \\ P(A_n) &= 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \ldots \cdot (365 - (n-1))}{365^n} = p_n \end{aligned}$$

$p_n \uparrow 1$

n	5	10	15	20	23	25	50
p_n	0,027	0,117	0,253	0,411	0,507	0,569	0,970

Schon ab 23 Personen ist diese Wahrscheinlichkeit größer als 0,5.

Es könnte sich lohnen darauf zu wetten.

Beispiel

Lotto 6 aus 49 ohne Zusatzzahl, $\searrow$ Zufall im Ziehungsgerät

- Getippt seien die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6
- Ergebnis: 6-elementige Teilmenge einer 49-elementigen Menge $\binom{49}{6} = 13983816$ gleichwahrscheinliche Ziehungsergebnisse
- Anzahl der Möglichkeiten für genau 4 Richtige:
  49 Zahlen zerfallen in „gute“ (1, 2, ..., 6) und „schlechte“ (7 bis 49)
  Ziehungsvorgang gedanklich in zwei Schritte zerlegen:
  1. gute Zahlen ziehen $\binom{6}{4} = 15$ Möglichkeiten
  2. schlechte Zahlen ziehen jeweils $\binom{43}{2} = 903$ Möglichkeiten

  Es gibt $15 \cdot 903 = 13545$ günstige Möglichkeiten für einen Vierer.
- Wahrscheinlichkeit für einen Vierer: $\frac{13545}{13983816} \approx 0,00097$

Beispiel

Ein fairer Würfel wird 7-mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jede Augenzahl von 1 bis 6 vorkommt?

- Als Ergebnis notieren wir $(w_1, w_2, \ldots, w_7)$.
- $6 \cdot 6 \ldots \cdot 6 = 6^7$ mögliche gleichwahrscheinliche Ergebnisse
- Bei wie vielen Ergebnissen kommt jede Augenzahl vor?
  Umformulierung: Genau eine Augenzahl doppelt
  Zerlegen in Schritte:

1. Schritt	doppelte Augenzahl auswählen	6
2. Schritt	Plätze dieses Pärchens	$\binom{7}{2}$
3. Schritt	restliche 5 Augenzahlen auf 5 Plätze	$5!$

  Bei $6 \cdot \binom{7}{2} \cdot 5! = 15120$ Ergebnissen kommt jede Augenzahl vor.
- $P(\text{jede Augenzahl kommt vor}) = \frac{15120}{6^7} \approx 0,05$.

Aufgabe

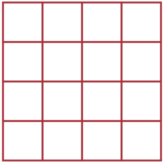
Auf wie viele verschiedene Arten kann man das 4×4-Brett der Zeichnung färben, wenn

a) *jedes Feld nach freier Wahl schwarz oder weiß gefärbt wird*

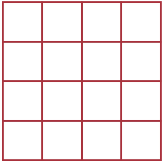
b) *8 Felder schwarz und 8 Felder weiß gefärbt werden*

c) *2 Felder weiß, 4 Felder schwarz und 10 Felder rot gefärbt werden*

d) *jedes Feld mit einer anderen von 16 verschiedenen Farben gefärbt wird*



Lösung



a) jedes Feld nach freier Wahl schwarz oder weiß: 2^{16}

b) 8 Felder schwarz und 8 Felder weiß: $\binom{16}{8}$

c) 2 Felder weiß, 4 Felder schwarz und 10 Felder rot: $\binom{16}{2} \cdot \binom{14}{4}$

d) jedes Feld mit einer anderen von 16 verschiedenen Farben: $16!$

Literatur

- Dinges, H.; Rost, H. (1982): Prinzipien der Stochastik. Stuttgart: Teubner.
- Engel, A. (1973): Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, Band 1, Stuttgart: Klett.
- Kolmogoroff, A. N. (1933). Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin: Springer, Berlin.
- Kultusministerkonferenz – KMK. (Hrsg.)(2003). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Neuwied: Wolters-Kluwer & Luchterhand.
- Müller, D. W.(1974). Thesen zur Didaktik der Mathematik. Math. Phys. Semesterberichte 21, 164-169.