1. Eine Tombola mit 10000 Losen wirbt mit dem Spruch: "Jedes vierte Los gewinnt!"

   - Wie deuten Sie dieses Versprechen?
   - Sie kaufen vier Lose. Ist es sicher, dass darunter ein Gewinnlos ist? Wie sieht es bei 100 Losen aus?
   - Ordnen Sie die folgenden Ereignisse nach ihrer Wahrscheinlichkeit:
     * A: „Unter vier Losen ist kein einziges Gewinnlos“
     * B: „Unter hundert Losen ist kein einziges Gewinnlos“
     * C: „Unter vier Losen ist mindestens ein Gewinnlos“
     * D: „Unter hundert Losen ist mindestens ein Gewinnlos“.

2. Im Jahre 1974 ging man davon aus, dass eine zufällig ausgewählte Familie in der Bundesrepublik Deutschland mit Wahrscheinlichkeit 0,48 keine Kinder und mit Wahrscheinlichkeit 0,24 ein Kind hat.
   Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat dann eine solche Familie

   a) höchstens ein Kind,

   b) mindestens zwei Kinder?

3. Bei der Klassenfahrt kommen 4 Jungen in ein Zimmer und können sich nicht über die Belegung der Betten einigen.
   Wie viele Tage würden sie brauchen, wenn sie in jeder Nacht eine andere Möglichkeit wählen würden und jede genau einmal vorkommen soll?

4. Zwei gute Münzen werden geworfen. Wir betrachten folgende Ereignisse:

   - A: „Die erste Münze zeigt Wappen“
   - B: „Die zweite Münze zeigt Wappen“
   - C: „Genau eine Münze zeigt Wappen“.

   Untersuchen Sie die Unabhängigkeit aller möglicher Ereignispaare.

5. Gegeben sind die Ereignisse A, B und C mit den Wahrscheinlichkeiten $P(A) = 0,4; P(B) = 0,2; P(C) = 0,3$.
   Die Ereignisse A und B seien unabhängig, die Ereignisse B und C unvereinbar.
   Stellen Sie die folgenden Ereignisse mit Hilfe von Mengenoperationen dar und berechnen Sie ihre Wahrscheinlichkeiten.

   a) B und C treten ein

   b) A oder B tritt ein

   c) B tritt nicht ein

   d) A und B treten ein

   e) A, B und C treten ein.

6. Die Wahrscheinlichkeit einer Fehlmessung bei Radar-Tempomessungen mit einem bestimmten Gerät liegt bei 0,01. Um das Risiko von Fehlentscheidungen zu verringem, wurde deshalb empfohlen, ein vorbeifahrendes Fahrzeug viermal zu messen. Man nehme an, dass die Messungen unabhängig voneinander seien. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass alle vier Messungen Fehlmessungen sind? Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist wenigstens eine Messung richtig? Zeigen Sie, dass auch bei n unabhängigen Messungen ein Restrisiko bleibt.

7. Bei einem Elfmeterschützen sei die Trefferwahrscheinlichkeit 80%. Nehmen Sie an, dass aufeinanderfolgende Schüsse unabhängig seien und die Trefferwahrscheinlichkeit für alle fünf Schüsse gilt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse

   a) A: „Alle fünf Schüsse treffen“
   b) B: „Alle fünf Schüsse treffen nicht“
   c) C: „Mindestens einer der fünf Schüsse trifft nicht“,
   d) D: „Mindestens einer der fünf Schüsse trifft”.
   e) Welche der Ereignisse A, B, C und D sind zueinander entgegengesetzt?

8. Die Wahrscheinlichkeit für einen Dreier im Lotto 6 aus 49 beträgt rund 0,018. Sie spielen jede Woche einen Tip. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnen Sie in 52 Wochen mindestens einen Dreier? Welche Unabhängigkeitsannahme steckt in der Rechnung? Ist sie gerechtfertigt? Begründen Sie Ihre Antwort.

9. Man geht davon aus, dass in Deutschland etwa 5% der Schulanfänger Linkshänder sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind dann unter 28 Schülerinnen und Schülern einer ersten Klasse höchstens 3 Linkshänder? Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind mindestens vier Linkshänder? Begründen Sie die Anwendung der Binomialverteilung.

10. Ein Schnelltest zur Bestimmung des Blutalkoholgehaltes von Autofahrern soll klären, ob dieser mindestens 0.5 Promille oder weniger beträgt. Der Test liefert mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% ein positives Ergebnis, wenn der Alkoholgehalt im Blut des Fahrers mindestens 0.5 Promille beträgt, und er fällt mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% negativ aus, wenn der Alkoholgehalt niedriger als 0.5 Promille ist. Es ist bekannt, dass 5% aller Autofahrer „betrunken fahren“, also mit mindestens 0.5 Promille Alkohol im Blut unterwegs sind. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass

    a) der Test bei einem zufällig ausgewählten Autofahrer positiv ausfällt?
    b) ein getesteter Fahrer weniger als 0.5 Promille Alkohol im Blut hat, wenn sein Test positiv ausfällt?

c) ein getesteter Fahrer mindestens 0.5 Promille Alkohol im Blut hat, wenn sein Test negativ ausfällt?

11. Bei einem Spiel werden die Zahlen 1, 2 und 3 zufällig permutiert. Für jede Zahl an der richtigen Stelle verglichen mit der Reibenfolge 1, 2, 3 bekommt man 10 Euro ausgezahlt.

    Was ist der faire Einsatz für dieses Spiel?

12. Zur Früherkennung einer Stoffwechselkrankheit bei Säuglingen wurde eine neue Untersuchungsmethode entwickelt. Bei der Anwendung dieser Methode wird in 0,01% aller Fälle eine vorliegende Stoffwechselkrankheit nicht entdeckt, während sie in 0,1 % aller Fälle irrtümlich eine Krankheit anzeigt.
    Durchschnittlich haben bei 1,1 Millionen Geburten 100 Säuglinge diese Krankheit.
    Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein als krank diagnostizierter Säugling diese Stoffwechselkrankheit hat?

13. Es gibt eineiige und zweieiige Zwillinge. Aus Beobachtungen in der Bundesrepublik Deutschland zwischen 1960 und 1990 ergibt sich, dass etwa 62% der Zwillinge zweieiig sind. Unter den eineiigen Zwillingen sind etwa 51% Jungen, während die zweieiigen Zwillinge etwa zur Hälfte verschiedenen Geschlechts sind und die übrigen sich zu gleichen Teilen auf die beiden Geschlechter aufteilen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei Zwillingspärchen das Ereignis A - „Die Zwillinge haben dasselbe Geschlecht“ eintritt. Vergleichen Sie diese Wahrscheinlichkeit mit der entsprechenden Wahrscheinlichkeit für „gewöhnliche“ Geschwisterpaare, wobei die Geburt eines Jungen mit Wahrscheinlichkeit 0,51 auftritt.

14. Man betrachte folgendes Spiel: Jeder Spieler muss einen Einsatz von 2 Euro zahlen und darf einmal mit drei regulären Würfeln würfeln. Wenn genau zwei Augenzahlen übereinstimmen, bekommt er das Doppelte des Einsatzes zurück, wenn alle drei Augenzahlen gleich sind, bekommt er das Fünffache des Einsatzes zurück. In allen anderen Fällen ist der Einsatz verloren.

    a) Geben Sie die Verteilung des Nettogewinns eines Spielers an.
    b) Ist das Spiel fair?
    c) Treffen Sie eine Vorhersage für den durchschnittlichen Nettogewinn aus 1000 Spielen bei einem Einsatz von 3 Euro pro Spiel.

15. Wie viele verschiedene 5stellige Zahlen kann man durch Nebeneinanderlegen von 5 aus 6 Kärtchen bilden, auf denen die Ziffern 1, 1, 2, 2, 2, 3 stehen?

16. In einem Preisausschreiben werden 10 Fragen gestellt. In jeder Frage gibt es 3 Antwortmöglichkeiten, von denen genau eine richtig ist. Jemand

kreuzt auf gut Glück unabhängig voneinander je eine Antwort an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für

a) lauter richtige Antworten
b) lauter falsche Antworten
c) wenigstens eine richtige Antwort?

17. Jemand spielt gegen einen gleichwertigen Gegner Schach. Es gibt kein Remis. Was ist wahrscheinlicher:

    a) 3 von 4 oder 5 von 8 Spielen zu gewinnen?
    b) mindestens 3 von 4 oder mindestens 5 von 8 Spiele zu gewinnen?

18. Beim Roulette bleibt die Kugel mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{37}$ auf der Null (Zero) liegen.

    a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt bei 10 Spielen mindestens einmal Zero?
    b) Würden Sie darauf wetten, dass bei 30 Spielen mindestens einmal Zero kommt? Begründen Sie Ihre Antwort!

19. Eine Urne enthält 100 Kugeln mit Nummern 00,01,02,...,99. Eine Kugel wird zufällig gezogen. Es sei X die erste und Y die zweite Ziffer ihrer Nummer. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

    a) $\{X = 3\}$
    b) $\{Y = 4\}$
    c) $\{X = Y\}$
    d) $\{X < 4 \text{ und } Y < 3\}$
    e) $\{X \cdot Y > 49\}$.

20. In einer Hand befinden sich 5 Lose: 1 Gewinn und 4 Nieten. Sie sollen von 5 Kindern nacheinander gezogen werden. Die Kinder können sich über die Reihenfolge nicht einigen. Ist der Streit berechtigt? Begründen Sie Ihre Antwort.

21. Bei einer 4x7,5km-Staffel der Frauen im Biathlon finden ein Liegendschießen und ein Stehendschießen statt, bei denen jede Starterin jeweils 5 Schüsse abgibt. Für die Starterinnen 1, 2, 3, und 4 werden im Stehendschießen die Trefferwahrscheinlichkeiten p_1, p_2, p_3 und p_4 angenommen. Die Schüsse jeder Starterin seien unabhängig untereinander und unabhängig von den Schüssen der anderen Starterinnen.

    a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim Stehendschießen die Starterinnen 1 und 2 je fünfmal, die Starterin 3 dreimal und die Starterin 4 nur zweimal trifft?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim Stehendschießen nur eine Starterin fehlerfrei bleibt?

c) Wie groß sind der Erwartungswert und die Varianz der Anzahl der Treffer der Staffel beim Stehendschießen?

d) Es sei nun $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0,8$. Eine Wette wird angeboten, bei der 100 EUR ausgezahlt werden, wenn alle Starterinnen beim Stehendschießen ohne Fehlschuß bleiben. Bei mindestens einem Fehlschuß wird nichts ausgezahlt.
Was ist der faire Einsatz für diese Wette?

22. Bei einem Glücksspiel werden zwei gute Würfel geworfen. Der Einsatz beträgt 1 Euro. Wirft man einen Pasch $(n, n), n = 1, 2, \dots, 6$, so erhält man den Einsatz zurück und noch n Euro dazu. Wirft man die Augensumme 7, so erhält man nur den Einsatz zurück. In den übrigen Fällen verliert man den Einsatz an die Bank.

    a) Geben Sie die Verteilung der Zufallsgröße X – „Nettogewinn des Spielers bei einem Spiel“ an.

    b) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

    c) Ungefähr wieviel wird die Bank vermutlich bei 1000 Spielen mit einem Spieler verdienen?

    d) Was wäre ein fairer Einsatz für dieses Spiel?

23. Eine gute Münze wird geworfen, bis Wappen fällt, höchstens jedoch fünf mal. Es interessieren die Ereignisse
A : „Wappen fällt frühestens im 3. Wurf.“
B : „Wappen fällt nicht schon im ersten Wurf.“
a) Geben Sie eine geeignete Ergebnismenge Ω an.
b) Stellen Sie A und B als Teilmengen von Ω dar.
c) Bestimmen Sie $P(A \cup B)$ und $P(A \cap B)$.

24. Bei Zwillingen seien mit Wahrscheinlichkeit a beide Jungen, mit Wahrscheinlichkeit b beide Mädchen. Sind die Zwillinge verschiedenen Geschlechts, so wird mit Wahrscheinlichkeit 0,5 zuerst der Junge geboren. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der zweite Zwilling ein Mädchen ist, wenn der erste Zwilling ein Mädchen war?

25. Aus einer Kiste mit 5 blauen und 5 roten Kugeln werden zufällig zwei Kugeln entnommen. Falls diese von der gleichen Farbe sind, gewinnen Sie 1,10 Euro, andernfalls verlieren Sie 1 Euro. Berechnen Sie den Erwartungswert des Nettogewinns.

26. In einem Gefäß befinden sich fünf Chips, die von 1 bis 5 nummeriert sind. Es werden zufällig und ohne Zurücklegen drei Chips gezogen. Es sei X die Summe der Zahlen auf den gezogenen Chips.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X an.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

27. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit a_n, dass unter $2n$ Neugeborenen genau n Mädchen sind, wenn man annimmt, dass Jungen- und Mädchengeburten gleichwahrscheinlich sind und aufeinanderfolgende Geburten bezüglich des Geschlechts voneinander unabhängig sind? Berechnen Sie a_n für $n = 5, 10, 20, 30$ und interpretieren Sie vergleichend die Ergebnisse.

28. Gegen einen Einsatz von 1 Euro erhalten Sie beim Werfen zweier guter Spielwürfel das k-fache des Einsatzes ausgezahlt, falls die Summe der Augenzahlen größer oder gleich zehn ist (k natürliche Zahl). Anderenfalls verfällt Ihr Einsatz.
Bei welchem Wert k_0 von k ist das Spiel fair? Begründen Sie Ihre Antwort.
Wie groß ist der Erwartungswert Ihres Gesamtnettogewinns, falls Sie das Spiel n mal (unabhängig voneinander) wiederholen?

29. Es sind 9 Punkte einer Ebene gegeben, von denen niemals 3 auf einer Geraden liegen. Wie viele Geraden gibt es, die genau 2 der 9 Punkte enthalten?

30. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach 8 Runden des Roulettespiels (37 gleichwahrscheinliche Zahlen) mindestens eine Zahl mehr als einmal aufgetreten ist?

31 Beobachtet wurden die Daten 2, 7, 5, 7, 7, 1, 5, 10, 2, 10, 2.

a) Bestimmen Sie arithmetisches Mittel, Median und die beiden Viertelwerte.

b) Ändern Sie einen Beobachtungswert so, dass sich das arithmetische Mittel deutlich vergrÃ¶ÃŸert und der Median gleich bleibt.