MSG Zirkel 7c – Hausaufgaben
vom 30.01.2012 zum 13.02.2012
Daniel Platt

Aufgabe `H-07026` (4 Punkte):
Gegeben sei eine Stadt mit k Busstationen, wobei $k \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl ist.

a) Die Stadtverwaltung will nun Buslinien anlegen. Jede Buslinie soll dabei genau m Haltestellen haben, wobei $m \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl ist, die kleiner als k ist. Eine Buslinie darf nur voneinander verschiedene Haltestellen anfahren.

   Wie viele verschiedene mögliche Buslinien gibt es? Dabei gelten zwei Buslinien als gleich, wenn sie dieselben Stationen in derselben Reihenfolge anfahren. Ansonsten gelten sie als verschieden.

b) Es sei n die Anzahl von Buslinien in der Stadt. Es seien k und m wie oben.

   Sei nun ein k vorgegeben. Für welche Werte von n und m kann man ein Busnetz anlegen, das als Graph betrachtet zusammenhängend ist?

Lösung

a) Wir benennen die k vorhandenen Busstationen mit $B_1, B_2, \ldots, B_k$.

   Wir möchten nun eine Buslinie aufstellen und fragen uns, wie viele Möglichkeiten wir dafür haben. Es gibt m Haltestellen zu vergeben.

   (i) Für die erste Haltestelle haben wir k Möglichkeiten, es könnte nämlich jede Haltestelle die Starthaltestelle sein. Es sei B_l diejenige Haltestelle, die wir wählen.

   (ii) Für die zweite Haltstelle haben wir jetzt nur noch $(k-1)$ Möglichkeiten. Nämlich gerade die Haltestellen $B_1, B_2, \ldots, B_{l-1}, B_{l+1}, \ldots, B_k$. Also alle Haltestellen außer B_l.

   (iii) Für die dritte Haltestelle haben wir noch $(k-2)$ Möglichkeiten.

   (iv) ...

   (v) Für die m-te und letzte Haltestelle haben wir jetzt nur noch $\big(k-(m-1)\big)$ Möglichkeiten.

   Wir erhalten die Gesamtzahl von Möglichkeiten, indem wir die Anzahlen von Möglichkeiten in jedem einzelnen Schritt miteinander multiplizieren. Also:

$$\text{Anzahl} = k \cdot (k-1) \cdot \cdots \cdot (k-(m-2)) \cdot (k-(m-1)) = \frac{k \cdot (k-1) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{m \cdot (m-1) \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{k!}{m!}$$

b) Die Frage lautet also vereinfacht gesprochen: Wie viele Buslinien brauchen wir, um k Busstationen miteinander zu verbinden?

   Behauptung: Die Zahlen k, m und n müssen die Ungleichung $m + (n-1) \cdot (m-1) \leq k$ erfüllen.

   Beweis: Die erste der n Buslinien kann m Stationen miteinander verbinden. Die zweite Buslinie muss eine Station mi der ersten Linie gemeinsam haben, die übrigen $(m-1)$

Stationen können aber verschieden von den bereits verbundenen sein. Die zweite Buslinie kann also $(m-1)$ zusätzliche Stationen miteinander verbinden.

Genauso sehen wir für die dritte, vierte, ..., n-te Linie: Jede Linie außer der ersten kann $(m-1)$ weitere Busstationen verbinden. Insgesamt können die n Linien also bis zu

$$\underbrace{m}_{\text{erste Linie}} + \underbrace{(m-1)}_{\text{erste Linie}} + \cdots + \underbrace{(m-1)}_{n\text{-te Linie}} = m + (n-1)\cdot(m-1)$$

Stationen miteinander verbinden. Wenn die Gesamtzahl von Stationen k kleiner oder gleich dieser Zahl ist, dann können die Buslinien also alle Stationen zu einem zusammenhängenden Busnetz verbinden.

Also: Falls die Ungleichung

$$m + (n-1)\cdot(m-1) \leq k$$

erfüllt ist, so kann man ein Busnetz anlegen, das als Graph betrachtet zusammenhängend ist.