

Möbiustransformationen und Indras Perlen

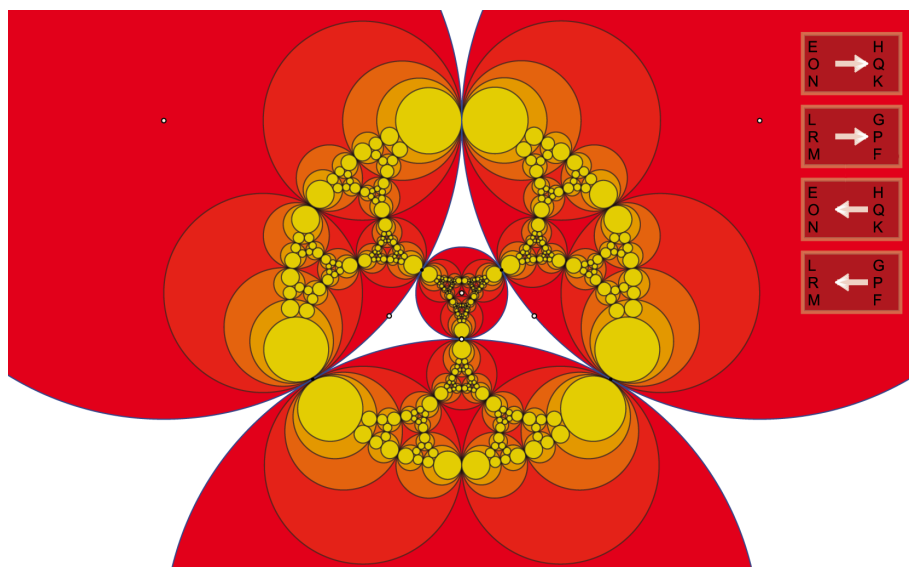
Teilnehmer:

Tuyet Oehme	Andreas-Oberschule, Berlin
Tobias Bucher	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin
Matthias Kestler	Gymnasium Tegernsee, Holzkirchen
Lucas Mann	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin
Yuhto Piekenbrock	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin
David Schubert	Herder-Oberschule, Berlin

Gruppenleiter:

Andreas Filler	Humboldt-Universität zu Berlin
----------------	--------------------------------

Muster wie in der unteren Abbildung – von Mumford, Series und Wright auch Indras Pearls genannt, siehe [2] – entstehen durch vier Kreise, welche sehr oft hintereinander durch vier Möbiustransformationen (von denen zwei die Umkehrabbildungen der beiden anderen sind) abgebildet werden. Damit hat sich unsere Gruppe in dieser Woche mit Erfolg auseinander gesetzt, und wir haben sogar einige solcher schönen Bilder konstruiert, indem wir uns ausführlich mit den Eigenschaften von Möbiustransformationen auseinandergesetzt und diese mithilfe des Computerprogramms Cinderella (siehe [4]) „durchgeführt“ haben. Beispielsweise haben wir die Parameter von Möbiustransformationen bestimmt sowie Fixpunkte und Anzahlen von Iterationen festgelegt.



1 Möbiustransformationen

1.1 Grundlagen

Definition 1.1. Eine Funktion

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (1.1)$$

mit $D(M) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, sowie $ad - bc \neq 0$ heißt *Möbiustransformation*.

Beispiele. Zwei Spezialfälle sind:

$$1. M_1(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} \quad (c = 0) \qquad 2. M_2(z) = \frac{1}{z}$$

Darstellungen

Für $c \neq 0$ erhält man durch äquivalentes Umformen eine alternative Darstellung für M :

$$M(z) = \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \left(z + \frac{d}{c}\right)^{-1} + \frac{a}{c}. \quad (1.2)$$

Folglich ist jede Möbiustransformation die Komposition einer Translation $T_1(z) = z + \frac{d}{c}$, einer Inversion $I(z) = z^{-1}$, einer Drehstreckung $D(z) = \frac{bc - ad}{c^2} \cdot z$ und einer weiteren Translation $T_2(z) = z + \frac{a}{c}$:

$$M = T_2 \circ D \circ I \circ T_1. \quad (1.3)$$

Eine weitere Darstellung für M erhält man durch Substitution von jedem Koeffizienten in (1.1) durch sein k -faches. Dies ermutigt zu folgender

Definition 1.2. Sei M eine Möbiustransformation in der in (1.1) gezeigten Darstellung. Zu $D := ad - bc$ seien $a' = \frac{a}{\sqrt{D}}$, $b' = \frac{b}{\sqrt{D}}$, $c' = \frac{c}{\sqrt{D}}$ und $d' = \frac{d}{\sqrt{D}}$. Dann ist

$$M(z) = \frac{a'z + b'}{c'z + d'} \quad (1.4)$$

die *normierte Darstellung* von M . Es gilt: $D' := a'd' - b'c' = 1$.

1.2 Gruppeneigenschaften

Zwei wichtige Eigenschaften von Möbiustransformationen zeigen folgende Sätze:

Satz 1.1. Seien M_1 und M_2 zwei Möbiustransformationen. Dann ist auch $M_1 \circ M_2$ eine Möbiustransformation.

Beweis. Seien $M_1(z) = \frac{pz+q}{rz+s}$ und $M_2(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Dann gilt:

$$(M_1 \circ M_2)(z) = \frac{a \cdot \frac{pz+q}{rz+s} + b}{c \cdot \frac{pz+q}{rz+s} + d} = \frac{(pa + qc)z + (pb + qd)}{(ra + sc)z + (rb + sd)}. \quad (1.5)$$

□

Satz 1.2. *M sei eine Möbiustransformation. Dann ist M umkehrbar und M^{-1} ist ebenfalls eine Möbiustransformation.*

Beweis. Für die Umkehrung M^{-1} muss gelten:

$$(M \circ M^{-1})(z) = z.$$

Nach Formel (1.5) ist dies genau dann erfüllt, wenn gilt: $pa + qc = 1$, $pb + qd = 0$, $ra + sc = 0$ und $rb + sd = 1$. Dieses lineare Gleichungssystem hat wegen $D := bc - ad \neq 0$ die eindeutige Lösung:

$$p = \frac{d}{D}, \quad q = -\frac{b}{D}, \quad r = -\frac{c}{D}, \quad s = \frac{a}{D}.$$

Daraus folgt, dass es zu jeder Möbiustransformation M eine Umkehrung M^{-1} gibt. □

Aus diesen beiden Sätzen folgert man:

Satz 1.3. *Sei MT die Menge aller Möbiustransformationen. Dann ist (MT, \circ) eine nicht-kommutative Gruppe. Diese ist isomorph zur Gruppe der $2,2$ -Matrizen.*

Beweis. Nach Satz 1.1 ist \circ eine Verknüpfung in MT , denn für alle $M_1, M_2 \in MT$ ist $M_1 \circ M_2 \in MT$. Ferner gilt in (MT, \circ) :

Assoziativität. Die Komposition von Funktionen ist bekanntlich assoziativ.

Existenz des neutralen Elements. Das neutrale Element von (MT, \circ) ist die identische Abbildung Id , die man für $a, d = 1$ und $b, c = 0$ erhält.

Existenz von inversen Elementen. Nach Satz 1.2 besitzt jede Möbiustransformation $M \in MT$ eine Umkehrung $M^{-1} \in MT$. Diese ist das Inverse zu M , denn es gilt $M \circ M^{-1} = Id$.

Kommutativität. (MT, \circ) ist nicht kommutativ. Das zeigt das Beispiel $M_1(z) = 2z, M_2(z) = z^{-1}$, denn offensichtlich ist $(M_1 \circ M_2)(z) = \frac{2}{z}$, jedoch $(M_2 \circ M_1)(z) = \frac{1}{2z}$.

Daraus folgt, dass (MT, \circ) eine nicht-kommutative Gruppe ist.

Zur Isomorphie: Sei $M_1(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ und $M_2(z) = \frac{pz+q}{rz+s}$. Die eindeutige Abbildung

$$\varphi(M) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

bildet Möbiustransformationen auf 2,2-Matrizen ab. Diese Abbildung ist operationstreu, denn es gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(M' \circ M) &= \varphi\left(\frac{(pa+qc)z+(pb+qd)}{(ra+sc)z+(rb+sd)}\right) = \begin{pmatrix} pa+qc & pb+qd \\ ra+sc & rb+sd \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \varphi(M') \cdot \varphi(M). \end{aligned}$$

□

1.3 Geraden- und Kreistreue

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit dem Verhalten von Möbiustransformationen gegenüber Kreisen und Geraden. Für die folgenden Beweise ist es zweckmäßig, eine allgemeine Gleichung für Geraden und Kreise in der Gaußschen Zahlenebene zu finden.

Eine allgemeine Gerade in der Ebene ist die Menge aller Punkte (x, y) mit

$$\beta x + \gamma y + \delta = 0. \quad (1.7)$$

Dabei sind α, β, γ reelle Koeffizienten.

Analog ist die Menge aller Punkte (x, y) mit:

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2 \quad (1.8)$$

der Kreis um (x_m, y_m) mit Radius r . Um beide Gleichungen in einer zusammenzufassen, multipliziere man zunächst (1.8) aus:

$$\begin{aligned} x^2 - 2xx_m + x_m^2 + y^2 - 2yy_m + y_m^2 - r^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + (-2x_m)x + (-2y_m)y + (x_m^2 + y_m^2 - r^2) &= 0. \end{aligned}$$

Es ergibt sich: Jede Gerade und jeder Kreis wird durch die folgende Gleichung beschrieben:

$$\alpha(x^2 + y^2) + \beta x + \gamma y + \delta = 0. \quad (1.9)$$

Zur Betrachtung von Geraden und Kreisen in der Gaußschen Zahlenebene ist es zweckmäßig, $z = x + iy$ einzusetzen:

$$\alpha z \bar{z} + \frac{1}{2}\beta(z + \bar{z}) - \frac{1}{2}i\gamma(z - \bar{z}) + \delta = 0 \quad (1.10)$$

$$\alpha z \bar{z} + \beta(z + \bar{z}) - i\gamma(z - \bar{z}) + \delta = 0. \quad (1.11)$$

Beim Umformen von (1.10) zu (1.11) wurde $\frac{1}{2}\beta$ durch β ersetzt, analog bei γ .

Mit dieser Darstellung zeigt man das folgende

Lemma 1.1. *Die komplexe Inversion bildet Geraden und Kreise auf Geraden und Kreise ab.*

Beweis. Eine beliebige Gerade oder ein Kreis sei gemäß der Darstellung in (1.11) gegeben durch die Gleichung

$$\alpha z \bar{z} + \beta(z + \bar{z}) - i\gamma(z - \bar{z}) + \delta = 0. \quad (1.12)$$

Zu zeigen ist, dass auch $\frac{1}{z}$ einer solchen Gleichung genügt. Man substituiere also z durch $\frac{1}{z}$ und erhält:

$$\alpha \frac{1}{z} \frac{1}{\bar{z}} + \beta \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} \right) - i\gamma \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}} \right) + \delta = 0. \quad (1.13)$$

Für $z \neq 0$ lässt sich (1.13) äquivalent umformen:

$$\begin{aligned} & \alpha \frac{1}{z} \frac{1}{\bar{z}} + \beta \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} \right) - i\gamma \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\bar{z}} \right) + \delta = 0 \\ \Leftrightarrow & \alpha + \beta(\bar{z} + z) - i\gamma(\bar{z} - z) + \delta z \bar{z} = 0 \\ \Leftrightarrow & \delta z \bar{z} + \beta(z + \bar{z}) - i(-\gamma)(z - \bar{z}) + \alpha = 0. \end{aligned}$$

Mit $\alpha' := \delta, \beta' := \beta, \gamma' := -\gamma, \delta' := \alpha$ erhält man die äquivalente Darstellung

$$\alpha' z \bar{z} + \beta'(z + \bar{z}) - i\gamma'(z - \bar{z}) + \delta' = 0.$$

Es verbleibt der Fall $z = 0$: Erfüllt $z = 0$ die Gleichung (1.12), so muss $\delta = 0$ gelten. Daraus folgt $\alpha' = 0$, das Bild bei der Inversion ist also eine Gerade. Folglich liegt dann auch $\frac{1}{z} = \infty$ auf der Bildgeraden. \square

Satz 1.4 (Geraden- und Kreistreue). *Jede Möbiustransformation bildet Kreise und Geraden auf Kreise und Geraden ab.*

Beweis. Sei M eine Möbiustransformation. Gemäß (1.3) hat M eine Darstellung $M = T_2 \circ D \circ I \circ T_1$. Die Translationen T_1 und T_2 und die Drehstreckung D sind geraden- und kreistreue. Nach Lemma 1.1 hat auch I eine Geraden- und Kreistreue. Daraus folgt die Behauptung. \square

1.4 Fixpunkte von Möbiustransformationen

Sei M mit $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ eine Möbiustransformation. Nun sollen die Fixpunkte, also die Lösungen für $M(z) = z$ gefunden werden:

Fall 1 ($c \neq 0$). Dann hat die Gleichung $M(z) = z$ die Lösung

$$z_0 = \frac{a-d}{2c} + \sqrt{\left(\frac{a-d}{2c}\right)^2 + \frac{b}{c}} = \frac{a-d + \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c}. \quad (1.14)$$

M hat also genau dann zwei Fixpunkte¹, wenn die Diskriminante $D^* = (a-d)^2 + 4bc$ ungleich 0 ist, ansonsten gibt es genau einen Fixpunkt. Es gilt:

$$D^* = (a-d)^2 + 4bc = (a+d)^2 - 4(ad-bc).$$

Insbesondere stellt man fest: Falls $D = ad - bc = 1$, so ist $D^* = (a+d)^2 - 4$. Dieser Zusammenhang spielt in späteren Untersuchungen eine wichtige Rolle.

Fall 2 ($c = 0$). Hier ist $M(z) = z$ äquivalent zu:

$$\begin{aligned} \frac{az+b}{d} &= z \\ \Leftrightarrow (a-d)z + b &= 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Fall 2.1 ($a-d \neq 0$). In diesem Fall hat die Gleichung genau eine Lösung, da es eine lineare Gleichung in z ist.

Fall 2.2 ($a-d = 0$). Falls $b \neq 0$, hat M keinen Fixpunkt. Ansonsten sind alle $c \in \mathbb{C}$ Lösungen der Gleichung, d. h. M ist die Identität.

Insbesondere erkennt man: Alle Möbiustransformationen außer der Identität haben höchstens zwei Fixpunkte.

Quellen und Senken

Abbildung 1.4 zeigt eine Möbiustransformation mit zwei Fixpunkten, die zusammen mit ihrer Umkehrung mehrfach auf Dr. Stickler (blaues Strichmännchen) angewandt wird. Zu erkennen ist, dass es zwei Grenzpunkte gibt. Der linke Grenzpunkt fungiert als Quelle und der rechte als Senke. Quelle und Senke sind die Fixpunkte der Möbiustransformation.

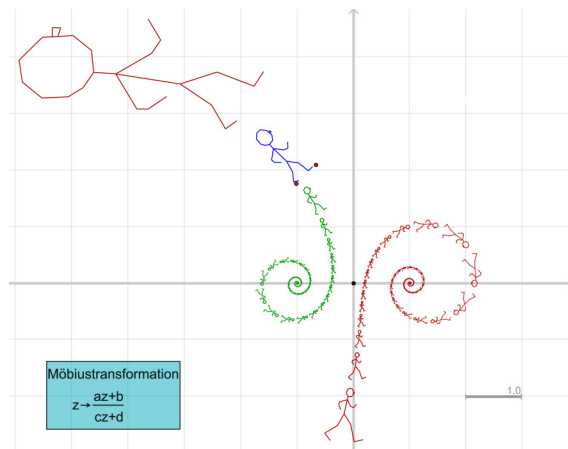


Abbildung 1: Quellen und Senken

¹Man beachte, dass die Quadratwurzel in den komplexen Zahlen stets zwei Werte hat.

1.5 Bestimmung von Möbiustransformationen durch drei Punkte und die dazugehörigen Bildpunkte

Die Behandlung von Fixpunkten im letzten Abschnitt führt zu folgendem wichtigen Satz:

Satz 1.5. *Eine Möbiustransformation ist durch drei paarweise verschiedene Punkte z_1, z_2, z_3 und ihre Bildpunkte w_1, w_2, w_3 eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien M und N zwei Möbiustransformationen, die die gegebenen Punkte auf die gegebenen Bildpunkte abbilden.

Nach Satz 1.2 ist dann auch N^{-1} eine Möbiustransformation, nach Satz 1.1 auch $N^{-1} \circ M$ und es gilt:

$$(N^{-1} \circ M)(z_1) = z_1, \quad (N^{-1} \circ M)(z_2) = z_2, \quad (N^{-1} \circ M)(z_3) = z_3.$$

Die Möbiustransformation $N^{-1} \circ M$ hat also drei Fixpunkte. Nach den Überlegungen des vorigen Abschnitts ist $N^{-1} \circ M$ die Identität. Daraus folgt $M = N$. \square

Beispiele. 1. Gesucht ist diejenige Möbiustransformation M , die

$$M(-1) = -i, \quad M(0) = 1, \quad M(1) = i$$

erfüllt. Zur Vereinfachung sei der Koeffizient d auf 1 normiert. Aus der zweiten Gleichung folgt $b = 1$. Weiteres Umformen der anderen Gleichungen ergibt $a = i$ und $c = -i$.

2. Nun ist die Möbiustransformation M gesucht, die

$$M(0) = -1, \quad M(1) = -i, \quad M(\infty) = 1$$

genügt. Aus der dritten Gleichung folgt $\frac{a}{c} = 1$, also $a = c$. Aus der ersten Gleichung folgt $\frac{b}{d} = -1$, also $b = -d$. Setzt man dies in die zweite Gleichung ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{a \cdot 1 + b}{a \cdot 1 - b} &= -i \\ \Leftrightarrow a + b &= -ia + b \\ \Leftrightarrow a &= b \cdot \frac{i+1}{i-1} \\ \Leftrightarrow a &= -ib. \end{aligned}$$

Eine mögliche Darstellung für M ist also

$$M(z) = \frac{z - i}{z + i}.$$

2 Klassifikation von Möbiustransformationen

2.1 Konjugation

Zur Klassifizierung von Möbiustransformationen ist es zweckmäßig, folgende Definition einzuführen:

Definition 2.1. Es sei M eine Möbiustransformation mit den Fixpunkten p_1 und p_2 und F eine Möbiustransformation, die p_1 auf 0 und p_2 auf ∞ abbildet. Dann heißt

$$\hat{M} = F \circ M \circ F^{-1} \quad (2.1)$$

Konjugation von M . \hat{M} hat die Form $\hat{M}(z) = k \cdot z$ ($k \in \mathbb{C}$). Der Koeffizient k heißt *Multiplikator von M* .

Hat M nur einen Fixpunkt p und ist G diejenige Möbiustransformation mit $G(p) = \infty$, so ist die Konjugation von M

$$\hat{M} = G \circ M \circ G^{-1}. \quad (2.2)$$

Dabei hat \hat{M} die Form $\hat{M}(z) = z + t$.

Für F und G findet man leicht

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{z - p_1}{z - p_2}, \\ F^{-1}(z) &= \frac{p_2 z + p_1}{z + 1}, \\ G(z) &= \frac{1}{z - p}, \\ G^{-1}(z) &= \frac{1}{z} + p. \end{aligned}$$

2.2 Klassen

Definition 2.2. Sei M eine Möbiustransformation mit zwei Fixpunkten und mit dem Multiplikator k . Dann heißt M

- *elliptisch*, falls $|k| = 1$,
- *hyperbolisch*, falls $k \in \mathbb{R}$,
- *loxodromisch* andernfalls.

Hat M nur einen Fixpunkt, so heißt M *parabolisch*.

Die Berechtigung dieser Klassifizierung erkennt man daran, dass jeder Klasse bestimmte Figuren zugeordnet werden können, wie in den folgenden Darstellungen zu sehen (die Darstellungen zeigen die Hintereinanderausführung der jeweiligen Möbiustransformation; jeder Pfeil wird auf den nächsten abgebildet):

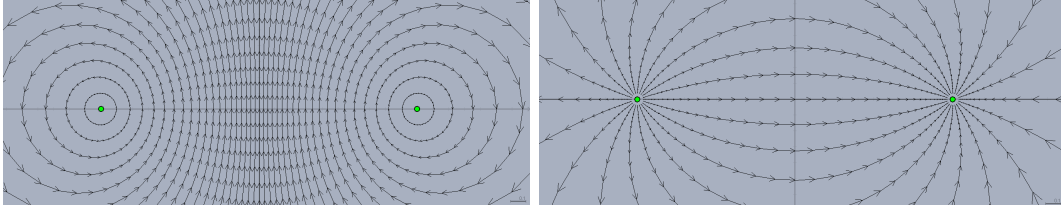


Abbildung 2: Elliptisch (links) und hyperbolisch (rechts)

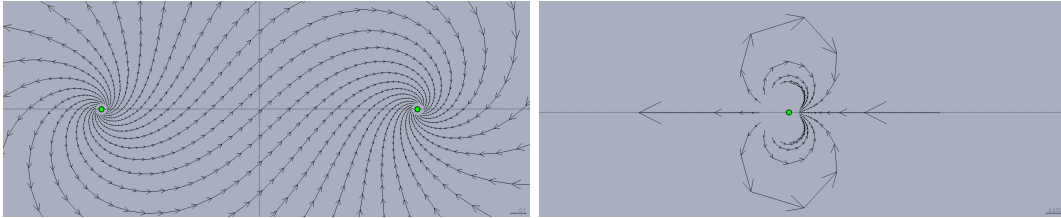


Abbildung 3: Loxodromisch (links) und parabolisch (rechts)

Ziel ist es nun, auf einfache Weise den Multiplikator k zu ermitteln:

Sei $M : M(z) = w$ eine Möbiustransformation mit den Fixpunkten p_1 und p_2 und $F(z) = \frac{z-p_1}{z-p_2}$. Aus (2.1) folgt dann:

$$\begin{aligned} \hat{M} \circ F &= F \circ M \\ k \cdot \frac{z - p_1}{z - p_2} &= \frac{w - p_1}{w - p_2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Die Gleichung (2.3) heißt *Normalform von M* bzgl. p_1 . Vertauscht man p_1 und p_2 (beide Fixpunkte sind gleichberechtigt!), so erhält man die analoge Darstellung

$$k' \cdot \frac{z - p_2}{z - p_1} = \frac{w - p_2}{w - p_1}. \quad (2.4)$$

Dabei ist $k' = \frac{1}{k}$. Dies ist die Normalform bezüglich p_2 .

Setzt man in (2.3) für z den unendlich fernen Punkt ∞ ein, so folgt:

$$\begin{aligned} k &= \frac{\frac{a}{c} - p_1}{\frac{a}{c} - p_2} \\ &= \frac{a - cp_1}{a - cp_2}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Beispiel. Man betrachte die Inversion:

$$M(z) = \frac{1}{z}.$$

Die Fixpunkte sind $p_1 = 1$ und $p_2 = -1$, d. h. der Wert für k ist folglich $k = -1$. Also ist die Inversion eine elliptische Möbiustransformation.

Mit den Ergebnissen der Fixpunktuntersuchungen in Kapitel 1.4 lässt sich (2.5) weiter umformen (dabei sei $\sqrt{(a+d)^2 - 4}$ im Folgenden als eine der komplexen Quadratwurzeln von $(a+d)^2 - 4$ fixiert). M ist hierbei in der normierten Darstellung gewählt.

$$\begin{aligned} k &= \frac{a - cp_1}{a - cp_2} \\ \Leftrightarrow k &= \frac{a - c \cdot \frac{a-d+\sqrt{(a+d)^2-4}}{2c}}{a - c \cdot \frac{a-d-\sqrt{(a+d)^2-4}}{2c}} \\ \Leftrightarrow k &= \frac{a+d - \sqrt{(a+d)^2-4}}{a+d + \sqrt{(a+d)^2-4}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}} &= a+d. \end{aligned}$$

Zusammengefasst erhält man:

Satz 2.1. Sei $M : M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ eine Möbiustransformation in normierter Darstellung. Dann ist M

- *elliptisch*, falls $(a+d) \in \mathbb{R}$ und $|a+d| < 2$,
- *hyperbolisch*, falls $(a+b) \in \mathbb{R}$ und $|a+d| > 2$,
- *parabolisch*, falls $a+b = \pm 2$,
- *loxodromisch* sonst.

3 Schottky-Gruppen

Gegeben seien vier Kreise D_A, D_a, D_B und D_b , sowie zwei Möbiustransformationen a bzw. b und ihre Umkehrabbildungen A bzw. B . Es gelte:

$$a(D_A) = D_a, \quad b(D_B) = D_b, \quad A(D_a) = D_A, \quad B(D_b) = D_B.$$

Definition 3.1. Unter einer *Schottky-Gruppe* versteht man die Menge aller Nacheinenausführungen von a , b , A und B .

Die folgenden beiden Bilder sowie die eingangs gezeigte Grafik veranschaulichen zwei Schottky-Gruppen. Dabei sind die großen roten Kreise die Ausgangskreise, wie in der Definition bezeichnet. Die weißen Punkte sind die Grenzpunkte der Abbildungen dieser vier Kreise.

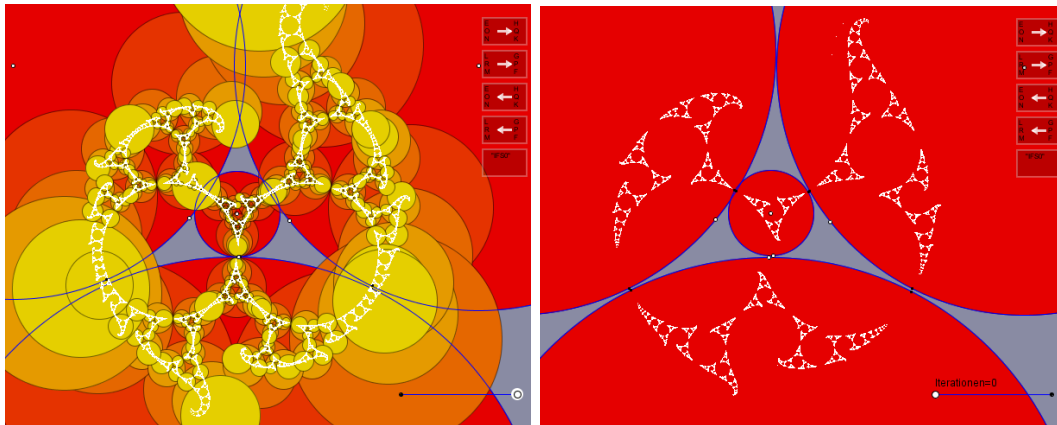


Abbildung 4: Schottky-Gruppen

Visualisierungen dieser Art bezeichnet man als *Indras Perlen*, siehe [2].

Literatur

- [1] Engel, J.: *Komplexe Zahlen und ebene Geometrie*, Oldenbourg, München, 2009.
- [2] Mumford, D.; Series, C.; Wright, D.: *Indra's Pearls. The Vision of Felix Klein*, Cambridge University Press, 2006.
- [3] Needham, T., *Anschauliche Funktionentheorie*, Oldenbourg, München, 2001.
- [4] Richter-Gebert, J.; Kortenkamp, U.: *The Cinderella.2 Manual*, Springer, Heidelberg, 2012.

