

Gekrümmte Welten

Teilnehmer:

Franziska Bielert	Andreas-Oberschule, Berlin
Tilman Braemick	Herder-Oberschule, Berlin
Max Grellmann	Herder-Oberschule, Berlin
Matthias Görg	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin
Louis Trinh	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin
Alina Klinz	Immanuel-Kant-Oberschule, Berlin

Gruppenleiter:

Jürg Kramer	Humboldt-Universität zu Berlin Mitglied im DFG-Forschungszentrum MATHEON „Mathematik für Schlüsseltechnologien“
Anna v. Pippich	Humboldt-Universität zu Berlin Mitglied im DFG-Forschungszentrum MATHEON „Mathematik für Schlüsseltechnologien“

Die uns vertraute Geometrie ist die Geometrie der Ebene. In dieser sogenannten *Euklidischen Geometrie* ist beispielsweise die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten P und Q durch die Gerade g durch P und Q festgelegt und der Abstand durch die Länge des entsprechenden Geradenstücks \overline{PQ} gegeben.

Allerdings spielt sich unser Leben auf der Oberfläche der Erde, d.h. auf einer Kugeloberfläche ab, weshalb wir es hier mit einer Geometrie zu tun haben, bei der alle Verbindungsstrecken gekrümmt sind. In Ergänzung der uns bekannten Euklidischen Geometrie wollen wir deshalb systematisch neue Geometrien kennenlernen, nämlich die *sphärische* und die *hyperbolische Geometrie*.

Für diese neuen Geometrien werden wir den „Abstand“ zwischen Punkten berechnen und dabei feststellen, dass uns vertraute Tatsachen nicht mehr gelten: Zum Beispiel beträgt die Innenwinkelsumme in einem Dreieck nicht mehr 180° und für eine gegebene Gerade g und einen nicht auf ihr liegenden Punkt P gibt es unendlich viele zu g parallele Geraden durch P .

1 Das Parallelenaxiom

Wir beginnen mit dem folgenden Axiom der Euklidischen Geometrie.

Parallelenaxiom. Zu jedem Punkt P und jeder Geraden g mit $P \notin g$ existiert genau eine Gerade h mit $P \in h$ und $g \cap h = \emptyset$.

Im Folgenden wollen wir Geometrien untersuchen, bei denen dieses Axiom in anderer Form gilt. Zunächst wiederholen wir aber einige bekannte Tatsachen der ebenen Euklidischen Geometrie.

1.1 Die Euklidische Geometrie

Wir betrachten die *Euklidische Ebene*

$$\mathbb{E} := \{P = (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

zusammen mit der *Euklidischen Distanz* $d : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, gegeben durch

$$d(P, Q) := \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

wobei $P = (x_1, y_1)$ und $Q = (x_2, y_2)$.

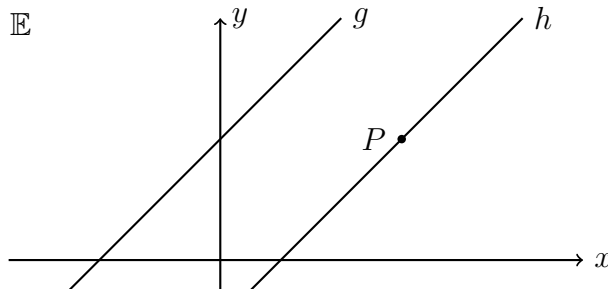
Die Euklidische Distanz ist gekennzeichnet durch folgende Eigenschaften: Die Distanz $d(P, Q)$ zwischen zwei Punkten ist genau dann gleich 0, wenn $P = Q$ gilt. Außerdem gelten Positivität, Symmetrie und die Dreiecksungleichung.

Zusätzlich gilt der bekannte Satz über die Innenwinkelsumme eines Dreiecks:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \quad (\alpha, \beta, \gamma \text{ Innenwinkel des Dreiecks}).$$

Isometrien der Euklidischen Ebene sind eineindeutige Abbildungen $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ (von ganz \mathbb{E} auf ganz \mathbb{E}), bei denen $d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$ gilt. Jede Isometrie setzt sich aus folgenden Isometrien zusammen: Translation, Drehung, (Gleit)spiegelung.

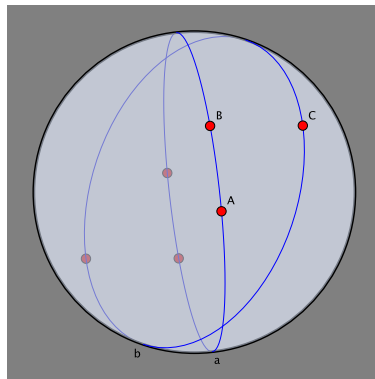
In der uns bekannten Euklidischen Geometrie gilt die erste, oben genannte Version des Parallelenaxioms:



Es lässt sich genau eine zur Geraden g parallele Gerade h mit $P \in h$ finden.

1.2 Die sphärische Geometrie

Die zweite Variante des Parallelenaxioms wird in der sphärischen Geometrie sichtbar. Da die Menge der Punkte auf der Oberfläche einer Kugel alle denselben Abstand R zum Mittelpunkt der Kugel haben, kann es keine Geraden im Euklidischen Sinn geben. Stattdessen bilden *Großkreise* unsere Geraden. Wie leicht in der Abbildung ersichtlich, gibt es nun keine parallelen Geraden mehr, da sich zwei oder mehr *Großkreise* immer schneiden.



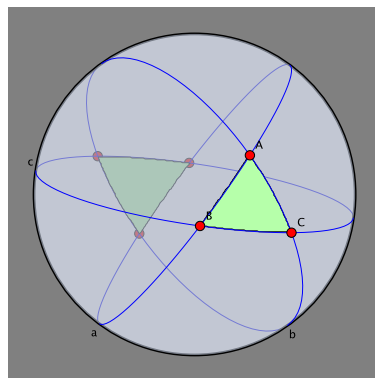
In der zweiten Variation lautet also das Parallelenaxiom:

Es existieren keine parallelen Geraden.

Bei Betrachtung von Dreiecken auf der Sphäre tritt ebenfalls ein entscheidender Unterschied auf. Wenn drei *Großkreise* ein Eulersches Dreieck Δ bilden, wobei jeder Innenwinkel $\alpha, \beta, \gamma < \pi$ sein soll, ist die Innenwinkelsumme $\alpha + \beta + \gamma$ stets größer als π , wie aus der Flächeninhaltsformel des Dreiecks ersichtlich ist:

$$F(\Delta) = R^2 \underbrace{(\alpha + \beta + \gamma - \pi)}_{>\pi}.$$

Der Überschuss $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ wird *sphärischer Exzess* genannt.



2 Die hyperbolische Ebene und die Möbiustransformationen

Nun soll eine neue Geometrie entworfen werden, für die eine dritte Version des Parallelenaxioms auftritt: *Zu jeder Geraden g und jedem Punkt P ($P \notin g$) gibt es unendlich viele zu g parallele Geraden durch P .*

Diese Version ist in der hyperbolischen Geometrie erfüllt, welche einen neuen Abstands- und Längenbegriff erfordert. Als Modell für die Betrachtung der hyperbolischen Geometrie dient die obere Halbebene zusammen mit den Möbiustransformationen.

Definition 2.1. Die *obere Halbebene* \mathbb{H} wird definiert als

$$\mathbb{H} := \{z = x + iy \mid y > 0 \wedge x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Definition 2.2. Eine *Möbiustransformation* $\gamma : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ ist eine Abbildung der Form

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (z \in \mathbb{H}).$$

Dabei sind a, b, c, d reelle Zahlen mit $ad - bc = 1$.

Bemerkung. (i) Durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil zeigt sich leicht, dass der Imaginärteil von $\gamma(z)$ stets größer als 0 ist, d.h. es gilt $\gamma(\mathbb{H}) \subseteq \mathbb{H}$.

(ii) Eine Möbiustransformation wird auch mithilfe der Matrix

$$\gamma = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

dargestellt. Die Forderung, dass $ad - bc = 1$ ist, bedeutet, dass die Determinante von γ gleich 1 ist. Die Menge aller Möbiustransformationen wird mit $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ bezeichnet.

Es sollen nun einige Eigenschaften der Möbiustransformationen untersucht werden. Dazu wird im Folgenden eine Möbiustransformation γ_i implizit mit einer Matrix $\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}$ identifiziert und wir schreiben auch $\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}(z)$ für $\gamma_i(z)$.

Satz 2.1. Seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$. Dann gilt:

$$(\gamma_1 \circ \gamma_2)(z) = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix}(z) = \left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \right)(z),$$

und die Hintereinanderausführung $\gamma_1 \circ \gamma_2$ ist wieder eine Möbiustransformation.

Beweis. Dies zeigt man leicht, indem man $(\gamma_1 \circ \gamma_2)(z) = \gamma_1(\gamma_2(z))$ nacheinander ausführt und umstellt. Aufgrund der Bedingungen an die Determinanten von γ_1 und γ_2 ergibt sich dann, dass auch die Determinante von $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ gleich 1 ist. \square

Satz 2.2. Die Menge aller Möbiustransformationen bildet zusammen mit der Hintereinanderausführung „ \circ “ eine (nicht-kommutative) Gruppe.

Beweis. Die reellen 2×2 -Matrizen von Determinante 1 bilden zusammen mit der Matrixmultiplikation „ \cdot “ eine nicht-kommutative Gruppe. Somit bilden, wie der vorangegangene Satz 2.1 zeigt, auch die Möbiustransformationen mit der Hintereinanderausführung „ \circ “ eine nicht-kommutative Gruppe. \square

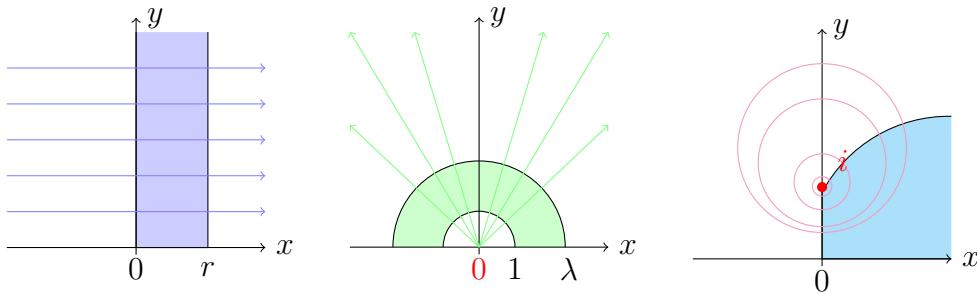
Bemerkung. Das inverse Element zu $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist $\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$; es gilt also

$$\gamma^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}.$$

Daher sind die Möbiustransformationen bijektiv und bilden eineindeutig von ganz \mathbb{H} auf ganz \mathbb{H} ab.

Beispiel. Man unterscheidet drei Grundtypen von Möbiustransformationen:

- $\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: $z \mapsto z + r$, d.h. Verschiebung von z um ein reelles r ;
- $\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda} \end{pmatrix}$: $z \mapsto \lambda z$, d.h. Streckung von z um ein reelles λ ;
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$: $z \mapsto -\frac{1}{z}$, d.h. hyperbolische Drehung von z um i .



Satz 2.3. Jede Möbiustransformation $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ kann mithilfe dieser Grundtypen dargestellt werden.

Beweis. Im Fall $a \neq 0$ überzeugt man sich leicht, dass

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & -c/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt. Dem Leser sei es an dieser Stelle selbst überlassen, herauszufinden, warum d auf der rechten Seite nicht auftaucht. Im Fall $a = 0$, gilt eine analoge Zerlegung. \square

3 Die Einheitskreisscheibe und die Cayleytransformation

Als weiteres Werkzeug für die Untersuchung der hyperbolischen Geometrie betrachten wir die offene Einheitskreisscheibe und die Cayleytransformation.

Definition 3.1. Die *offene Einheitskreisscheibe* wird definiert als

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

Definition 3.2. Die *Cayleytransformation* ist die Abbildung $h : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{D}$, gegeben durch

$$h(z) = \frac{z - i}{z + i} \quad (z \in \mathbb{H}).$$

Bemerkung. (i) Über eine Zerlegung von $h(z)$ in Real- und Imaginärteil weist man leicht nach, dass tatsächlich $|h(z)| < 1$ für alle $z \in \mathbb{H}$ gilt.

(ii) Ebenso kann nachgewiesen werden, dass h die Umkehrfunktion

$$h^{-1}(w) = i \frac{1 + w}{1 - w}$$

besitzt, welche Punkte aus \mathbb{D} auf \mathbb{H} abbildet. Somit ist die Cayleytransformation bijektiv und bildet ganz \mathbb{H} eineindeutig auf ganz \mathbb{D} ab.

Mit Hilfe der Cayleytransformation können nun Möbiustransformationen auf \mathbb{D} wie folgt sinnvoll definiert werden:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & \mathbb{H} & \xleftarrow{h^{-1}} & \mathbb{D} & & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 z & & & & & & & w \\
 \downarrow & & & & & & & \downarrow \\
 & & \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & & & \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} & & \\
 & & & & & & & \\
 & & & \mathbb{H} & \xrightarrow{h} & \mathbb{D} & & \\
 & & & & & & & \\
 & & & & & & & \frac{\alpha w + \beta}{\beta w + \bar{\alpha}}
 \end{array}$$

Eine Möbiustransformationen $h \circ \gamma \circ h^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ hat somit die Form

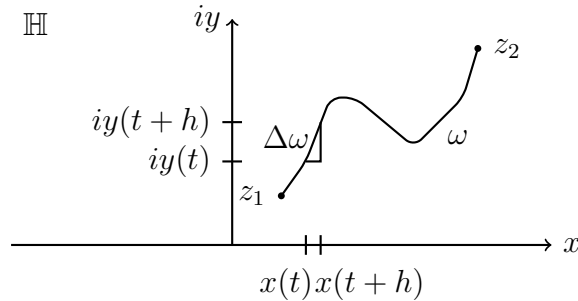
$$h \circ \gamma \circ h^{-1}(w) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} (w) = \frac{\alpha w + \beta}{\beta w + \bar{\alpha}} \quad (w \in \mathbb{D});$$

dabei sind $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (ausdrückbar in a, b, c, d) mit $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$. Die Möbiustransformationen auf \mathbb{D} bilden ebenso wie die Möbiustransformationen auf \mathbb{H} mit der Hintereinanderausführung „ \circ “ eine nicht-kommutative Gruppe. Auf genauere Beweise soll an dieser Stelle verzichtet werden.

4 Die hyperbolische Distanz

Es soll nun über die hyperbolische Weglänge eine Definition für die hyperbolische Distanz als kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten der oberen Halbebene erarbeitet werden. Wir rufen uns noch einmal in Erinnerung, wie die Euklidische Länge eines beliebigen Weges definiert ist.

Jeder Weg ω von $z_1 = x_1 + iy_1$ nach $z_2 = x_2 + iy_2$ in \mathbb{H} (gegeben für $t \in [t_{z_1}, t_{z_2}]$) durch $\omega(t) = x(t) + iy(t)$, wobei $x(t)$ eine Funktion der x -Koordinate und $y(t)$ eine Funktion der y -Koordinate ist, beide stetig differenzierbar, mit $x(t_{z_i}) = x_i$, $y(t_{z_i}) = y_i$ für $i = 1, 2$) lässt sich beliebig genau durch einen Streckenzug linearer Funktionen approximieren.



Für jedes dieser Teilstücke $\Delta\omega$ lässt sich die Euklidische Länge $\ell(\Delta\omega)$ mit dem Satz des Pythagoras berechnen zu

$$\begin{aligned} \ell(\Delta\omega) &= \sqrt{(x(t+h) - x(t))^2 + (y(t+h) - y(t))^2} \\ \iff \ell(\Delta\omega) &= h \sqrt{\frac{(x(t+h) - x(t))^2}{h^2} + \frac{(y(t+h) - y(t))^2}{h^2}}. \end{aligned}$$

Durch Aufsummieren aller $\ell(\Delta\omega)$ sowie den Grenzübergang $h \rightarrow 0$ erhält man

$$\ell(\omega) = \int_{t_{z_1}}^{t_{z_2}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Definition 4.1. Die *hyperbolische Weglänge* eines Weges ω von z_1 nach z_2 in \mathbb{H} ist definiert als

$$\ell_{\text{hyp}}(\omega) := \int_{t_{z_1}}^{t_{z_2}} \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt.$$

Jeder Punkt des Weges ω erhält also eine Wichtung in Höhe des Kehrwertes seiner y -Koordinate.

Satz 4.1. Sei $\gamma \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ und ω ein Weg in \mathbb{H} . Dann gilt

$$\ell_{\text{hyp}}(w) = \ell_{\text{hyp}}(\gamma(w)),$$

d.h. die hyperbolische Weglänge ist invariant unter Möbiustransformationen.

Beweis. Nach Satz 2.3 genügt es, die Behauptung für die drei erwähnten Grundtypen zu zeigen. Dies kann durch Einsetzen in die Definition eingesehen werden. \square

Nun wird die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten untersucht. Dazu wird es sich als nützlich erweisen, zwei Punkte auf die iy -Achse zu transformieren.

Lemma 4.2. Seien $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{H}$, $z_1 \neq z_2$ beliebig. Dann ist es mit Hilfe einer Möbiustransformation $\gamma \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ möglich, die Punkte so zu transformieren, dass $\gamma(z_1) = i$ und $\gamma(z_2) = i\lambda$ mit $\lambda > 1$ gilt.

Beweis. Wir behaupten, dass die Möbiustransformation $\gamma = h^{-1} \circ d_\alpha \circ h \circ \gamma_1$ das Gewünschte leistet. Hierbei ist γ_1 durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} y_1^{-\frac{1}{2}} & -x_1 y_1^{-\frac{1}{2}} \\ 0 & y_1^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$$

beschrieben. Es gilt also

$$\gamma_1(z) = \frac{y_1^{-\frac{1}{2}} z - x_1 y_1^{-\frac{1}{2}}}{y_1^{\frac{1}{2}}} = \frac{z - x_1}{y_1}, \quad \text{d.h. } \gamma_1(z_1) = i.$$

Mit der Cayleytransformation h gilt deshalb

$$(h \circ \gamma_1)(z) = \frac{\frac{z-x_1}{y_1} - i}{\frac{z-x_1}{y_1} + i} = \frac{z - z_1}{z - \bar{z}_1},$$

d.h. $h \circ \gamma_1$ bildet den Punkt z_1 auf den Mittelpunkt 0 der offenen Einheitskreisscheibe \mathbb{D} ab. Mit der Möbiustransformation d_α wird nun $(h \circ \gamma_1)(z_2)$ so mit dem Winkel α um 0 gedreht, dass z_2 danach auf der x -Achse liegt. Um den Winkel α zu bestimmen, schreiben wir die komplexe Zahl $(h \circ \gamma_1)(z_2)$ in Polarkoordinaten:

$$\frac{z_2 - z_1}{z_2 - \bar{z}_1} = \rho e^{i(-\alpha)} \quad \text{mit} \quad \rho = \left| \frac{z_2 - z_1}{z_2 - \bar{z}_1} \right|.$$

Durch h^{-1} wird \mathbb{D} wieder auf \mathbb{H} abgebildet. Es gilt schließlich $\gamma(z_2) = h^{-1}(\rho) = i\lambda$ mit

$$\lambda = \frac{1 + \rho}{1 - \rho} = \frac{1 + \left| \frac{z_2 - z_1}{z_2 - \bar{z}_1} \right|}{1 - \left| \frac{z_2 - z_1}{z_2 - \bar{z}_1} \right|} > 1 \quad (4.1)$$

und $\gamma(z_1) = h^{-1}(0) = i$, wie gewünscht. \square

Satz 4.3. Seien $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{H}$. Die hyperbolische Distanz $d_{\text{hyp}}(z_1, z_2)$ entspricht $\ln(\lambda)$, wobei λ durch (4.1) gegeben ist.

Beweis. Offensichtlich gilt nach Lemma 4.2 und Satz 4.1

$$d_{\text{hyp}}(z_1, z_2) = \min_{\substack{\omega \text{ Weg von} \\ z_1 \text{ nach } z_2}} \ell_{\text{hyp}}(\omega) = \min_{\substack{\omega \text{ Weg von} \\ i \text{ nach } i\lambda}} \ell_{\text{hyp}}(\omega).$$

Somit folgt

$$d_{\text{hyp}}(z_1, z_2) = \min_{\substack{\omega \text{ Weg von} \\ i \text{ nach } i\lambda}} \int_{t_i}^{t_{i\lambda}} \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt = \int_{t_i}^{t_{i\lambda}} \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \ln(y(t)) \Big|_{t_i}^{t_{i\lambda}} = \ln(\lambda),$$

da der Integrand genau dann minimal ist, wenn $x'(t) = 0$ ist. Das bedeutet, dass sich die x -Koordinate des Weges nicht verändert, weshalb der kürzeste Weg der euklidischen Geraden zwischen i und $i\lambda$ entspricht. \square

Um die Form hyperbolischer Geraden zu bestimmen, müssen wir somit die Bilder der erweiterten positiven imaginären Achse $\mathcal{I} := \{iy \in \mathbb{H}\} \cup \{0\} \cup \{i\infty\}$ unter allen Möbiustransformationen bestimmen.

Lemma 4.4. Sei $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ mit $c, d \neq 0$. Dann ist das Bild $\gamma(\mathcal{I})$ von \mathcal{I} unter γ ein Halbkreis vom Radius $R = 1/(2|cd|)$ um den Mittelpunkt $M = (m, 0)$, wobei $m = (ad + bc)/(2cd)$ ist.

Beweis. Für $z = iy$ mit $y \geq 0$, berechnen wir zunächst $\gamma(iy)$ als

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (iy) &= \frac{a(iy) + b}{c(iy) + d} = \frac{(aiy + b)(-ciy + d)}{(ciy + d)(-ciy + d)} = \frac{acy^2 + (ad - bc)iy + bd}{c^2y^2 + d^2} \\ &= \frac{acy^2 + bd}{c^2y^2 + d^2} + i \frac{y}{c^2y^2 + d^2} = f(y) + ig(y); \end{aligned}$$

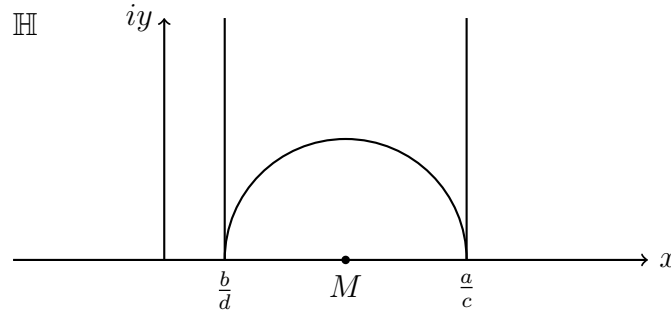
dabei ist $f(y) := (acy^2 + bd)/(c^2y^2 + d^2)$ der Realteil und $g(y) := y/(c^2y^2 + d^2)$ der Imaginärteil des Bildpunktes $\gamma(iy)$.

Nun kann nachgerechnet werden, dass die Gleichung

$$(f(y) - m)^2 + g(y)^2 = R^2$$

erfüllt ist; dies ist die Form einer Kreisgleichung mit dem verschobenen Mittelpunkt $(m, 0)$ und dem Radius R . Da nun für $y = 0$ gilt, dass $f(0) = b/d$ und $g(0) = 0$ ist, und für $y = \infty$, dass $f(\infty) = a/c$ und $g(\infty) = 0$ ist, überlegt man sich, dass alle Bildpunkte von $y = 0$ bis $y = \infty$ in der oberen Halbebene liegen und wie behauptet einen Halbkreis bilden. \square

Bemerkung. Ist im obigen Satz $c = 0$, so erhält man $f(0) = b/d$, $g(0) = 0$ und $f(\infty) = b/d$, $g(\infty) = \infty$. Somit ist in diesem Fall das Bild $\gamma(\mathcal{I})$ eine Halbgerade. Im Fall $d = 0$ erhält man analog eine Halbgerade durch a/c .



Insgesamt haben wir damit festgestellt, dass die hyperbolischen Geraden entweder (Euklidische) Halbkreise sind, die senkrecht auf der reellen Achse stehen, oder (Euklidische) Halbgeraden, welche parallel zur iy -Achse sind.

5 Der hyperbolische Flächeninhalt

Um den hyperbolischen Flächeninhalt zu definieren, erinnern wir uns zunächst an die Definition im Euklidischen:

Definition 5.1. Sei B eine Menge von Punkten aus \mathbb{R}^2 . Der Flächeninhalt $F(B)$ von B ist

$$F(B) = \iint_B dx \, dy,$$

sofern das Integral existiert.

In Anlehnung an diese Definition wird nun der hyperbolische Flächeninhalt definiert, wobei wie bei der Weglänge jeder Punkt mit seinem Imaginärteil gewichtet wird.

Definition 5.2. Sei B eine Menge von Punkten aus $\mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{i\infty\}$. Der hyperbolische Flächeninhalt $F_{\text{hyp}}(B)$ von B ist

$$F_{\text{hyp}}(B) = \iint_B \frac{dx \, dy}{y^2},$$

sofern das Integral existiert.

Bemerkung. Analog zu Satz 4.1 zeigt sich, dass Möbiustransformationen den hyperbolischen Flächeninhalt einer Punktmenge nicht verändern. Zum Beweis werden erneut die drei Grundtypen aus Satz 2.3 in die Definition des Flächeninhalts eingesetzt.

Abschließend soll hier der hyperbolische Flächeninhalt eines geodätischen Dreiecks betrachtet werden. Ohne Beweis wird der folgende Satz formuliert:

Satz 5.1. *Der hyperbolische Flächeninhalt eines geodätischen Dreiecks Δ beträgt*

$$F_{\text{hyp}}(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma);$$

dabei sind α, β, γ die Innenwinkel des Dreiecks Δ .

Bemerkung. Nach der Definition des Flächeninhalts ist dieser nicht-negativ, woraus folgt, dass $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ gilt.

6 Zusammenfassung

Die drei verschiedenen Geometrien fassen wir nun wie folgt zusammen.

	Euklidische Geometrie	Sphärische Geometrie	Hyperbolische Geometrie
Innenwinkelsumme	$\alpha + \beta + \gamma = \pi$	$\alpha + \beta + \gamma > \pi$	$\alpha + \beta + \gamma < \pi$
Parallelenaxiom (g Gerade, $P \notin g$)	Es gibt durch P genau eine zu g parallele Gerade.	Es gibt durch P keine zu g parallele Gerade.	Es gibt durch P unendlich viele zu g parallele Geraden.

Literatur

- [1] A. Filler, *Euklidische und nichteuklidische Geometrie*, BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1993.
- [2] J. Kramer, *Notizen zur Geometrie I*, ETH-Vorlesungsskript, WS 1989/90.

