MSG Zirkel 7c – Hausaufgaben
vom 30.01.2012 zum 13.02.2012
Daniel Platt

Aufgabe `H-07026` (4 Punkte):

Es sei $ABCD$ ein Viereck. Beweise die folgenden Aussagen:

1. Wenn $ABCD$ ein Parallelogramm ist, dann halbieren sich die Diagonalen. (Das heißt: Der Schnittpunkt der Diagonalen ist der Mittelpunkt beider Diagonalen)

   Hinweis: Zeige mit Hilfe von Kongruenzsätzen, dass zwei Diagonalenabschnitte die gleiche Länge haben.

2. Wenn sich in $ABCD$ die Diagonalen halbieren, dann ist $ABCD$ ein Parallelogramm.

Lösung

Vorbemerkung: Die beiden Teilaufgaben 1. und 2. sind komplett verschiedene Aufgaben! Nur weil man Teil 1 gezeigt hat, folgt Teil 2 nicht automatisch. Und umgekehrt genauso wenig.

In 1. ist zu zeigen:

$$\text{Parallelogramm} \Longrightarrow \text{Diagonalen halbieren sich}$$

In 2. ist zu zeigen:

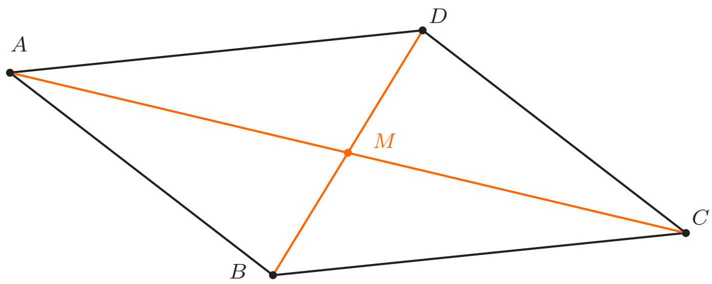
$$\text{Diagonalen halbieren sich} \Longrightarrow \text{Parallelogramm}$$

Die eine Aussage ist also der Kehrsatz der anderen. Dass Satz und Kehrsatz nicht unbedingt äquivalent sind, haben wir im Zirkel schon öfter gesehen. Ein Beispiel, in dem zum Beispiel der Satz gilt, aber nicht der Kehrsatz, ist:

$$\text{Es regnet} \Longrightarrow \text{Ich spanne den Schirm auf}$$

Das sollte man immer beachten. Nun zu den Lösungen der Aufgaben:

1. Sei also $ABCD$ ein Parallelogramm. Sei M der Schnittpunkt der beiden Diagonalen:



Wir wollen zeigen, dass $\overline{AM}$ und $\overline{CM}$ die gleiche Länge haben, und dass $\overline{BM}$ und $\overline{DM}$ die gleiche Länge haben.

Wir betrachten die Dreiecke ΔABM und ΔCDM. $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sind gleich lang, nach Eigenschaften eines Parallelogramms. $\angle AMB$ und $\angle CMD$ sind gleich groß als Scheitelwinkel. $\angle MBA$ und $\angle MDC$ sind gleich groß als Stufenwinkel.

Nach Kongruenzsätzen ist $\Delta ABM \simeq CDM$. Also gilt insbesondere: $\overline{BM} = \overline{DM}$ und $\overline{CM} = \overline{AM}$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

2. Sei also $ABCD$ ein Viereck, in dem sich die Diagonalen halbieren. Sei M ihr Schnittpunkt. Wir betrachten die Dreiecke ΔABM und ΔCDM. Nach Kongruenzsatz SWS gilt $\Delta ABM \simeq \Delta CDM$. Damit gilt insbesondere $\overline{AB} = \overline{CD}$. Analog erhalten wir für die anderen Seiten: $\overline{AD} = \overline{BC}$.

   Aus der früheren Charakterisierung von Parallelogrammen wissen wir daher: $ABCD$ ist ein Parallelogramm.