MSG Zirkel 7c – Hausaufgaben
vom 30.01.2012 zum 13.02.2012
Daniel Platt

Zusatzaufgabe `H-07036` (2 Punkte):

Zeige, dass die folgenden Aussagen im Allgemeinen nicht gelten. Das heißt: Finde mindestens für jede Aussage mindestens ein Beispiel, bei dem die Aussage falsch ist.

(a) Seien a, b, c ganze Zahlen und sei $m \geq 2$ eine natürliche Zahl. Aussage:

$$ac \equiv bc \pmod{m} \Longrightarrow a \equiv b \pmod{m}$$

(b) Seien a, b ganze Zahlen. Aussage:

$$a \equiv b \pmod{2} \Longrightarrow a + 2 \equiv b \cdot 2 \pmod{2}$$

Lösung

(a) Mit den Bezeichnungen aus der Aufgabe seien $m = 2$, $a = 1$, $b = 0$, $c = 2$. Dann gilt zwar

$$1 \cdot 2 \equiv 0 \cdot 2 \pmod{2}$$

doch nach dem Kürzen des Faktors 2 gilt nicht

$$1 \equiv 0 \pmod{2}$$

Wir haben also ein Beispiel gefunden, für das die Aussage nicht gilt. Also ist die Aussage im Allgemeinen falsch.

(b) Mit den Bezeichnungen aus der Aufgabe seien $a = b = 1$. Dann:

$$1 \equiv 1 \pmod{2}$$

aber nicht:

$$1 + 2 = 3 \equiv 2 = 2 \cdot 1 \pmod{2}$$

Die Aussage wird übrigens genau dann falsch, wenn a eine ungerade Zahl ist.

MSG Zirkel 7c – Hausaufgaben
vom 30.01.2012 zum 13.02.2012
Daniel Platt

Aufgabe `H-07037` (2 Punkte):
Gelten die folgenden Kongruenzen? Begründe deine Antwort!

(a) $-1 \equiv 1000 \pmod{13}$

(b) $-136 \equiv 136 \pmod{17}$

(c) $-2^k \equiv 2^k \pmod{2^{k+1}}$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$

Lösung

(a) Wir prüfen, ob 13 die Differenz von rechter und linker Seite teilt: Es ist $(1000 - (-1)) : 13 = 77$. Nach dem ersten Satz über Kongruenzen wissen wir damit, dass $1000 \equiv -1 \pmod{13}$.

(b) Wir gehen genau wie bei (a) vor und finden, dass $(136 - (-136)) : 17 = 16$. Also gilt auch diese Kongruenz.

(c) Wieder prüfen wir, ob der Modul 2^{k+1} die Differenz $2^k - (-2^k)$ teilt.

Zunächst stellen wir fest, dass

$$\begin{aligned} & 2^k - (-2^k) \\ =& 2^k + 2^k \\ =& 2^k \cdot (1+1) && \text{(Ausklammern)} \\ =& 2^k \cdot 2 \\ =& 2^{k+1} \end{aligned}$$

Und natürlich ist 2^{k+1} ein Teiler von 2^{k+1}. Nämlich $\left(2^k - (-2^k)\right) : 2^{k+1} = 1$. Also gilt auch diese Kongruenz.