Formelsammlung für die Klausur Analysis II

Diese Formelsammlung wird in der Klausur zur Verfügung gestellt.
Wünsche bezüglich von Ergänzungen können noch (schriftlich) in den Übungen abgegeben werden.

Trigonometrische Funktionen

Potenzreihendarstellung: $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$, $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x) \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y). \end{aligned}$$

Differenzformeln:

$$\begin{aligned} \sin(x) - \sin(y) &= 2 \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right), \\ \cos(x) - \cos(y) &= -2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right). \end{aligned}$$

Einschließungslemma für sin und cos: Für alle reellen Zahlen $x \in (0,2]$ gilt

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos(x) < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \qquad x - \frac{x^3}{6} < \sin(x) < x.$$

Hyperbolische Funktionen

Definition: $\cosh x = \frac{1}{2}\left(\exp(x) + \exp(-x)\right)$, $\sinh x = \frac{1}{2}\left(\exp(x) - \exp(-x)\right)$

Summenformeln: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Grundintegrale:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x \qquad \text{auf } \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = \begin{cases} \operatorname{artanh}(x) & \text{auf } (-1,1) \\ \operatorname{arcoth}(x) & \text{auf } (-\infty,-1) \cup (1,\infty) \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) = \operatorname{arsinh}(x) \qquad \text{auf } \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) \qquad \text{auf } (-1,1)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| = \begin{cases} \operatorname{arcosh}(x) & \text{auf } (1,\infty) \\ -\operatorname{arcosh}(-x) & \text{auf } (-\infty,-1) \end{cases}$$

Gammafunktion: $\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt$

Taylorformel: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (ξ zwischen x_0 und x)

Integralform des Restgliedes: $R_n(f,x_0)(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$

Taylorformel für Funktionen mehrerer Variablen:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{|\alpha| \le n} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(p) \cdot (x-p)^\alpha}_{=:T_n(f,p)(x)\ n\text{-tes Taylorpolynom}} + \underbrace{\sum_{|\alpha| = n+1} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^\alpha}(\xi) \cdot (x-p)^\alpha}_{=:R_n(f,p)(x)\ n\text{-tes Restglied}}$$

mit

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{(\partial x_1)^{\alpha_1} \cdots (\partial x_k)^{\alpha_k}}.$$

Sonstiges: Für alle $x, y \in [0;1]$ mit $x > y$ und alle $p \in \mathbb{N}$ gilt $0 \le x^p - y^p \le p(x-y)$.