Verschiebungen und Drehungen

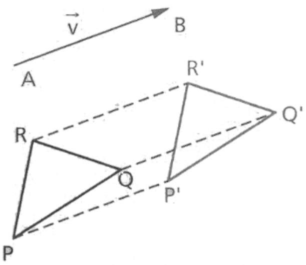
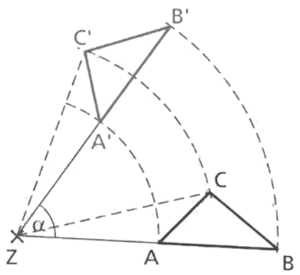
06.11.2014

Handout und Arbeitsblatt zum Vortrag von Mareen Hampel, Lucas Warntjen und Chris Patricia Hänsel im Modul Ausgewählte Kapitel der Didaktik der Mathematik bei Prof. Dr. Filler im WS 14/15

Ein Blick in den Berliner Rahmenlehrplan

3/4	verschobene und gedrehte Figuren erkennen, benennen, vervollständigen und herstellen (*Bild und Original, Verschiebung, Drehung, drehsymmetrische Figuren, schubsymmetrische Muster und Bordüren)*
5/6	geometrische Konstruktionen ausführen *(Konstruktion von Spiegelungen, Verschiebungen und Drehungen)*
7/8	Wahlmodul W3 - Geometrische Abbildungen und Symmetrie *(enthält u.a. Konstruktionsanleitungen, das Arbeiten mit Schablonen sowie Muster)*
9/10	Modul P9 – Veränderungen mit Funktionen beschreiben *(geht u.a. auf die Auswirkungen der einzelnen Parameter auf die Funktionsgraphen ein, z.B. Verschiebungen entlang der y-Achse durch den konstanten Summanden einer Funktion)*

Eigenschaften von Verschiebungen und Drehungen

Verschiebungen	**Drehungen**
bijektive Abbildungen der Ebene auf sich (geradentreu, längentreu, winkeltreu, parallelentreu, orientierungstreu, d.h. erzeugen zu den Originalen kongruente Bilder mit gleichem Umlaufsinn)	
Verschiebung der Ebene, d.h. es gibt keinen Fixpunkt AUSNAHME: Nullverschiebung	Drehung der Ebene um einen Punkt, d.h. es gibt genau einen Fixpunkt: Drehzentrum AUSNAHME: Nulldrehung
Es gibt unendlich viele Fixgeraden parallel zur Verschiebungsrichtung.	Eine Drehung um 180° bildet Geraden durch das Zentrum auf sich selbst ab.
 Verschiebung eines Dreiecks PQR um einen Verschiebungspfeil $\vec{v}$.[i]	 Drehung eines Dreiecks ABC um ein Drehzentrum Z mit einen Winkel α.[ii]

Was ist Konstruieren? [iii]

„[Konstruieren ist] eine Tätigkeit, die mit idealen Objekten in der Vorstellung operiert. […] Ausgehend von einer im Allgemeinen vorgegebenen Ausgangskonfiguration wird durch eine Konstruktion mit geeigneten Werkzeugen, die nur nach festen Regeln eingesetzt werden dürfen, eine Zielkonfiguration erzeugt."

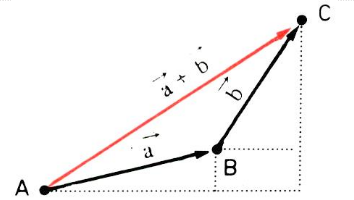
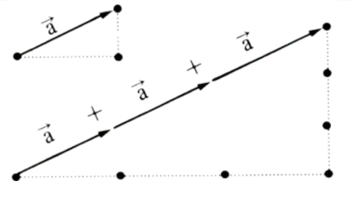
Ausgangs-/Zielkonfiguration:
Eine Menge geometrischer Objekte und ein System von Beziehungen, wobei die Zielkonfiguration die Ausgangskonfiguration einschließt und erweitert.

Konstruktionsschritte:
Eine endliche Anzahl von Operationen mit festgelegten Werkzeugen, die nur nach festen Regeln verwendet werden

Konstruktionswerkzeuge:
- klassisch (nach Euklid) – Zirkel und Lineal ohne Messskala, so dass man
    a. von jedem Punkt nach jedem Punkt eine Strecke ziehen kann,
    b. eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend verlängern kann,
    c. mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann.
- praktisch – Parallelenzeichner, Rolllineale und Geodreieck
- modern – Dynamische Geometriesoftware

Bedeutung von Verschiebungen hinsichtlich einer Propädeutik des Vektorbegriffes

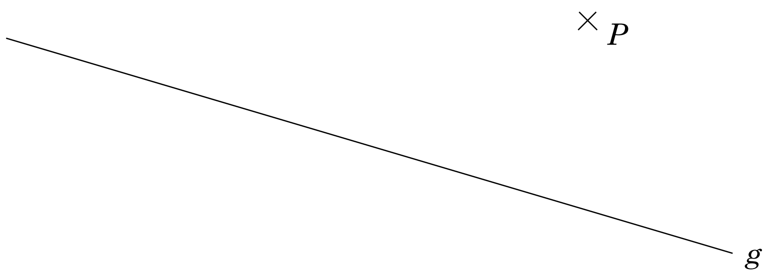
Ein solides Verständnis von Verschiebungen kann Schülern bei der Einführung des Vektorbegriffes helfen, da in der Mehrzahl der gängigen Lehrbücher Vektoren als Pfeilklassen eingeführt werden, welche in Form der Verschiebungspfeile schon bekannt sein sollten.

Definition	*„Wir fassen […] alle Pfeile der Ebene (des Raumes), die gleiche Länge und gleiche Richtung haben, zu einer Klasse zusammen. Eine solche Pfeilklasse bezeichnen wir als einen Vektor in der Ebene (im Raum).“*[iv]	
Addition	durch Aneinanderlegen der Pfeile	
skalare Multiplikation	durch zentrische Streckung bzw. durch mehrfaches Abtragen der Pfeile	
Didaktische Schwierigkeiten	• Verkürzung der Pfeilklasse auf: „Ein Vektor ist ein Pfeil.“ • mangelndes Verständnis der Äquivalenzklassen	

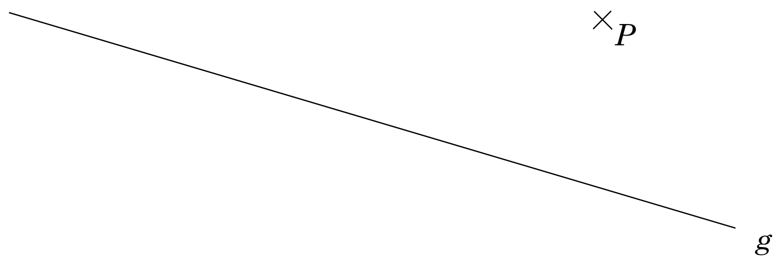
Die größte Schwierigkeit bei der Einführung von Vektoren besteht in der Vermittlung des Unterschiedes zwischen einem Vektor und seinem Repräsentanten, welchen wir als Pfeil im Koordinatensystem darstellen können. Ein Vektor ist auch im Pfeilklassenmodell die Äquivalenzklasse aller Pfeile mit gleicher Länge, gleicher Richtung und gleicher Orientierung. Gerade das Konzept des Ortsvektors erzeugt hier Schwierigkeiten, da er plötzlich an den Koordinatenursprung ‚angeklebt‘ ist und es nur einen expliziten Ortsvektor pro Punkt gibt, was dem zuvor eingeführten Repräsentantenbegriff widerspricht.

Übungen

1. Verschiebe die gegebene Gerade *g* durch den Punkt *P* indem du einmal mit und einmal ohne Dreieck konstruierst! Formuliere für beide Konstruktionen je eine kurze Konstruktionsanleitung

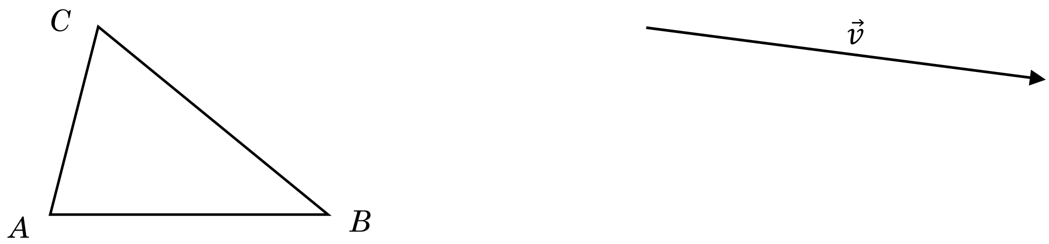


Verschiebung *(mit Zirkel und Lineal)*	

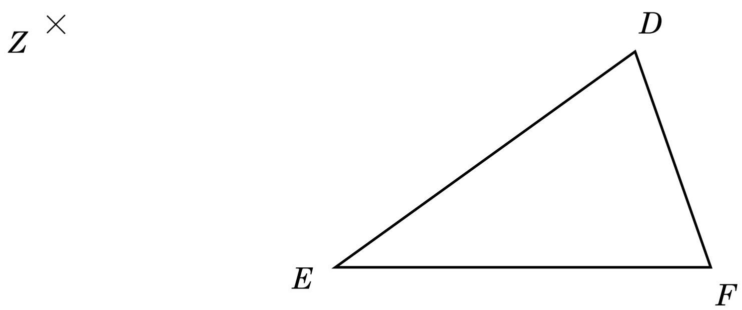


Verschiebung *(mithilfe eines Dreiecks)*	

2. Verschiebe das gegebene Dreieck *ABC* um den angegebenen Verschiebungspfeil $\vec{v}$! Welche der beiden Konstruktionen aus Aufgabe 1 ziehst du hierfür vor?

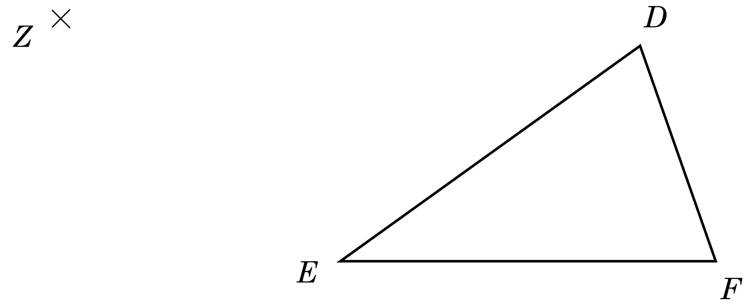


3. Drehe das gegebene Dreieck *DEF* um das Drehzentrum *Z* mit einem Winkel von 60°! Formuliere eine kurze Konstruktionsanleitung!



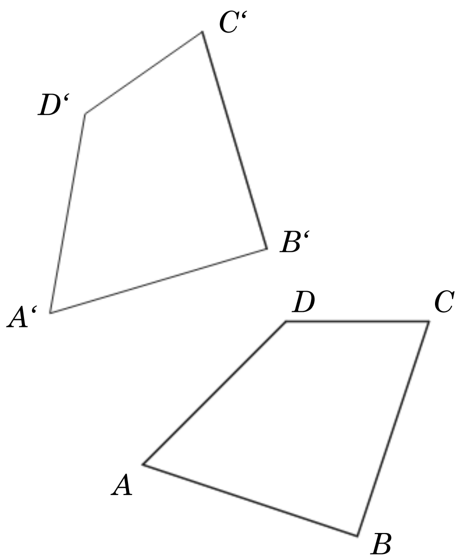
Drehung	

4. Führe die gleiche Drehung nochmals als Nacheinanderausführung zweier Spiegelungen durch! Die Konstruktionsanleitung ist unten zu finden.

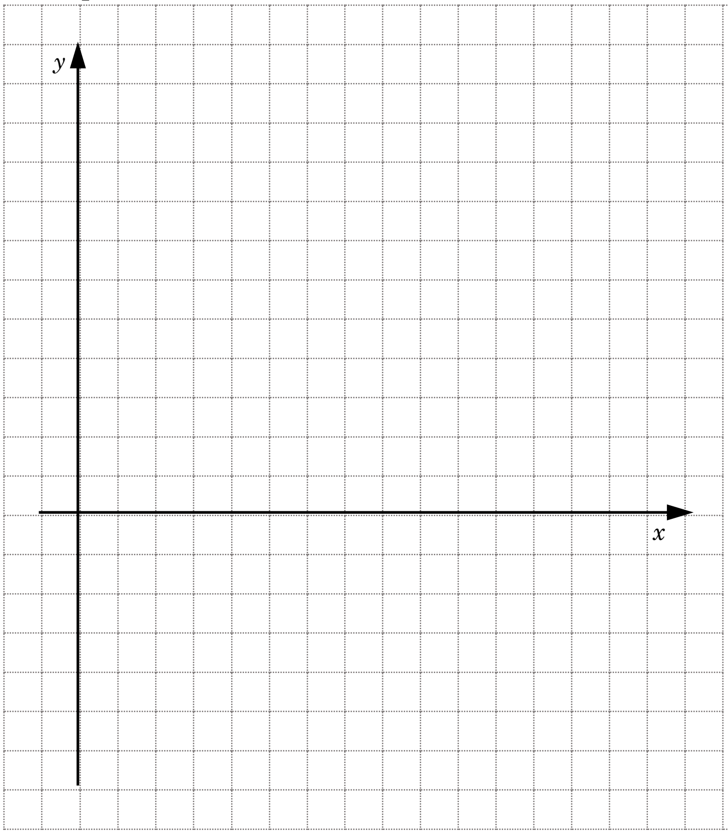


Verschiebung oder Drehung *(als NAF zweier Spiegelungen)*	*„Spiegelt man eine Figur, ändert sich ihr Umlaufsinn. Durch Verkettung zweier Spiegelungen erhält man eine Doppelspiegelung, wobei der Umlaufsinn der Figur und ihrer Bildfigur sich gleichen. Liegen die Spiegelachsen der ersten und der zweiten Spiegelung parallel zueinander, erhält man eine Verschiebung, wobei der Verschiebungsvektor doppelt so lang ist, wie der Abstand der Spiegelachsen voneinander. Liegen die beiden Spiegelachsen nicht parallel zu einander, erhält man eine Drehung im Gegenuhrzeigersinn um den Schnittpunkt der beiden Spiegelachsen. Der Drehwinkel ist doppelt so groß wie der Winkel zwischen den beiden Achsen, gemessen von der Spiegelachse der ersten Drehung zur Spiegelachse der zweiten Drehung.“*[v]

5. Finde das Drehzentrum und den Drehwinkel der folgenden Figur!



6. Zeichne das Viereck $ABCD$ mit den Koordinaten $A(0\,|\,3)$, $B(4\,|\,1)$, $C(5\,|\,6)$ und $D(3\,|\,3)$ in das Koordinatensystem, wähle dafür eine geeignete Achseneinteilung.
Verschiebe $\square ABCD$ anschließend um den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und gib die Koordinaten der Bildpunkte an!



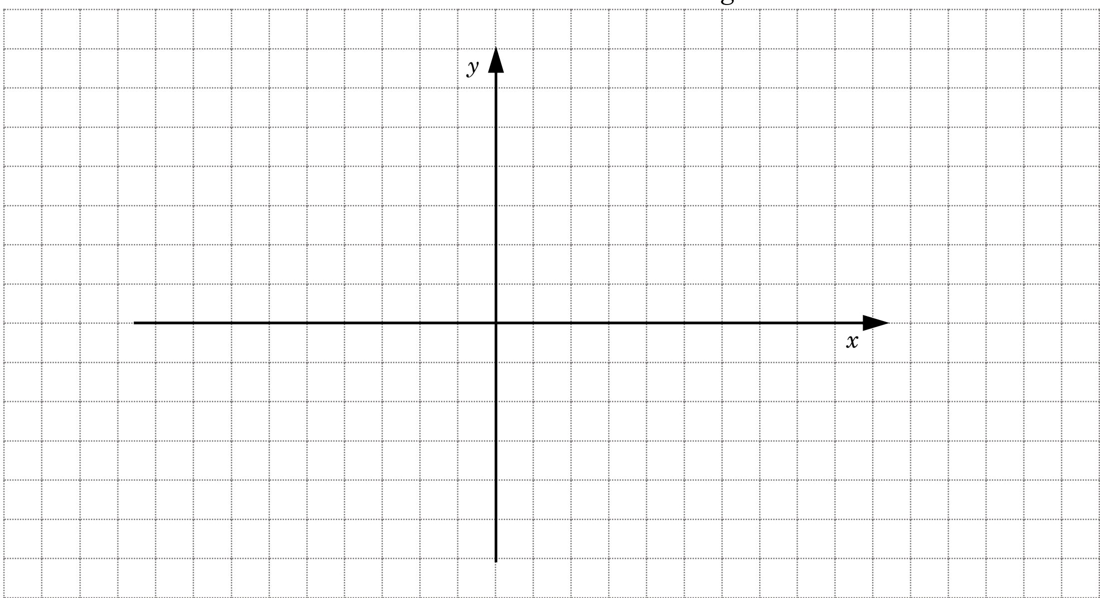
$A‘(\quad|\quad)$

$B‘(\quad|\quad)$

$C‘(\quad|\quad)$

$D‘(\quad|\quad)$

7. Die Funktion $f(x) = -\frac{1}{3}\,x + 2$ wird um $-2\;LE$ in Richtung der y-Achse verschoben.
Welche Funktion erhält man nach der Verschiebung?



[i]HANELT, Martina et al. (2005). *Mathematik: Lehrbuch für die Klasse 6 – Gymnasium*. 1.Auflage, DUDEN PAETEC Schulbuchverlag, Berlin 2005, S. 83
[ii]HANELT (2005), S.84
[iii]vgl. WEIGAND, Hans Georg et al. (2009). *Didaktik der Geometrie der Sekundarstufe I*. 1. Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 2009, S.55 ff.
[iv] Zitat und Grafiken aus BIGALKE, Anton; KÖHLER, Norbert (1996). *Analytische Geometrie und Lineare Algebra*. Ausgabe Brandenburg, 1. Auflage, Cornelsen Verlag, Berlin 1996, S. 16 ff.
[v] SCHEID, Harald; SCHWARZ, Wolfgang (2009). *Elemente der Geometrie*. 4. Auflage, korr. Nachdruck, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 2009, S. 109