

Der Ton macht die Musik

Analyse von Tonsignalen mittels Fourier-Transformationen

Teilnehmer:

Tobias Berchner	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin
Holger Hesse	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin
Yasir Kaynar	Andreas-Oberschule, Berlin
Dieu Thuy Linh Tran	Andreas-Oberschule, Berlin
Viet Son Pham	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin
Jonas Pohl	Herder-Oberschule, Berlin
Henry Salfner	Käthe-Kollwitz-Oberschule, Berlin

Gruppenleiter:

Falk Ebert	Technische Universität Berlin Mitglied im DFG-Forschungszentrum MATHEON „Mathematik für Schlüsseltechnologien“
------------	--

Was genau ist ein Ton? Warum klingt der gleiche Ton bei einer Flöte ganz anders als bei einem Klavier? Warum nehmen wir die Töne trotzdem irgendwie als gleich wahr? Und was hat das mit der Funktionsweise eines MP3-Players zu tun? Diesen und anderen Fragestellungen haben wir uns in der Sommerschule gestellt. Mit Hilfe der Fourier-Reihenentwicklung ist es uns möglich gewesen, Töne in Grund- und Obertöne zu zerlegen. Neben vielen theoretischen Überlegungen haben wir dann auch mal praktisch die Frequenzspektren diverser Instrumente – von Violine bis Vuvuzela – bestimmt und versucht, am Computer zu synthetisieren.

1 Einleitung

Wenn wir im Alltag Töne hören, können wir für gewöhnlich verschiedene Instrumente bzw. Geräuschquellen problemlos auseinanderhalten, auch wenn die Töne eigentlich dieselbe Tonhöhe und dieselbe Lautstärke haben.

Woran liegt das?

Warum klingt der gleiche Ton bei einer Flöte ganz anders als bei einem Klavier?

Um dies beantworten zu können, muss zuerst geklärt werden:

Was ist überhaupt ein Ton aus math./phys. Sicht?

Ein Ton ist mathematisch gesehen nichts anderes als eine periodische Schwingung, z.B. die gleichförmige Sinus-Schwingung einer Stimmgabel oder der Ton eines Streichinstruments:

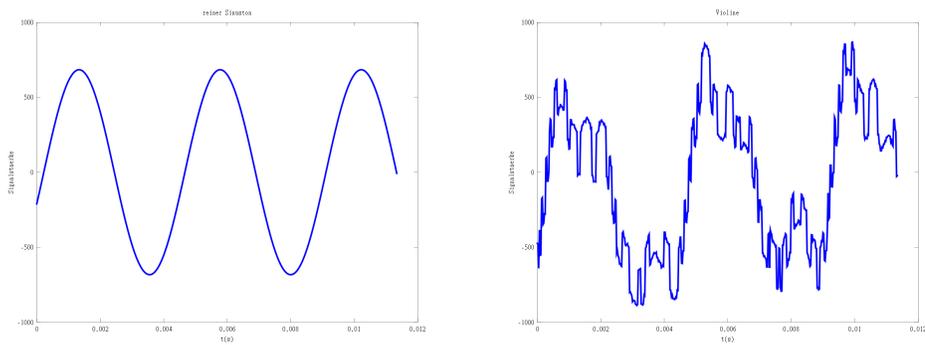


Abbildung 1: Ton einer Stimmgabel (220 Hz) und der Ton einer Geige (220 Hz)

Mit einem Synthesizer lässt sich eine Sinus-Schwingung problemlos reproduzieren. Der Klang der Geige ist aber um ein Vielfaches komplexer.

Die Frage, die sich nun stellt, lautet:

Lassen sich komplexe Schwingungen wie die der Geige durch eine Kombination aus Sinus-/Kosinus-Schwingungen darstellen, damit sie synthetisierbar werden?

Ja! Das ist möglich. Im Folgenden machen wir uns anschaulich, wie ein einfaches Signal durch Überlagerung von trigonometrischen Funktionen approximiert werden kann.

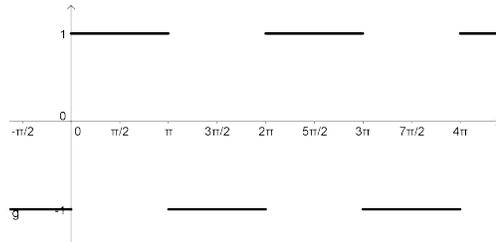


Abbildung 2: Rechteck-Schwingung

$$x(t) = \begin{cases} 1 & : x \in [0, \pi[, \\ -1 & : x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

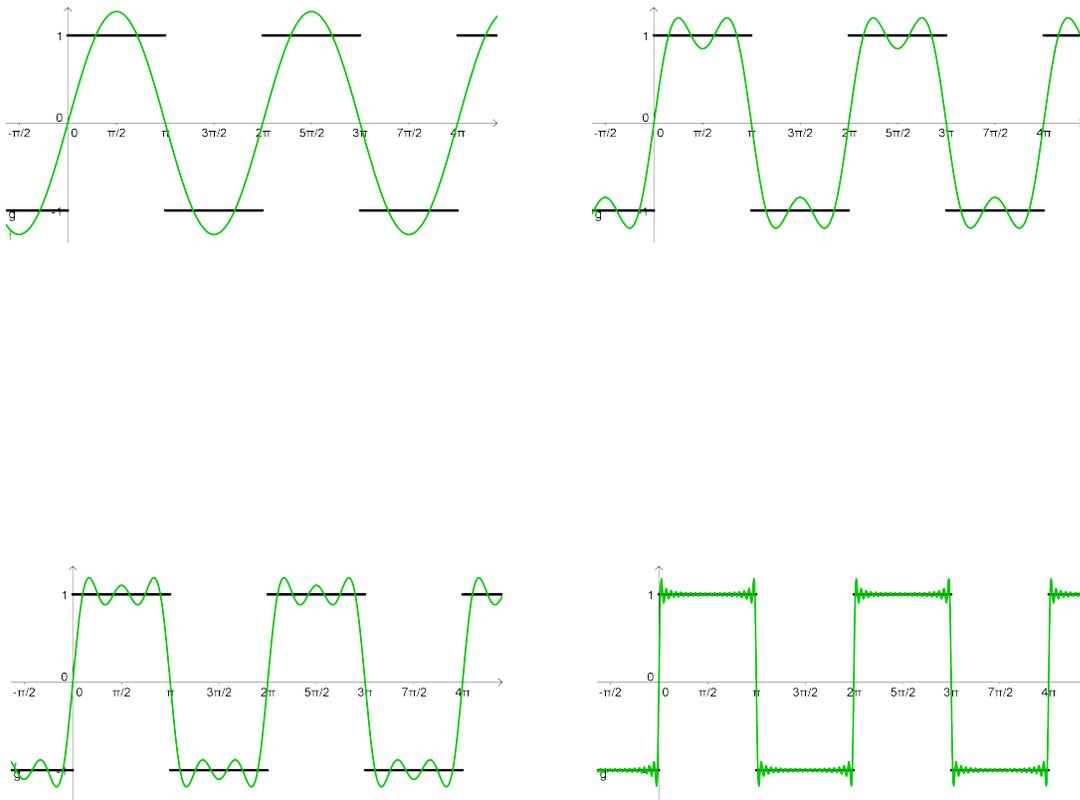


Abbildung 3: Approximation der Rechteck-Schwingung mit 1, 2, 3 und 20 überlagerten Funktionen

Wie kann man nun eine beliebige Schwingung x in eine Kombination trigonometrischer Funktionen zerlegen, die überlagert x approximieren?

Dazu hat sich schon der Mathematiker Joseph Fourier (1768-1830) Gedanken gemacht. Nach ihm ist die *Fourier-Reihe* benannt, die nichts anderes als eine Summe von Sinus-/Kosinus-Funktionen mit je einem zugehörigen Koeffizienten ist.

2 Fourier-Reihen

2.1 Vektoren und Skalarprodukte

Notwendig für diese Zerlegung ist ein elementares Verständnis von Vektoren und Skalarprodukten. Ein Vektor u ist definiert als ein Element eines *Vektorraums*.

Ein Vektor u kann sowohl Teil eines endlichen Vektorraums ($u \in \mathbb{R}^N$, N : Anzahl der Dimension), als auch eines unendlichdimensionalen Raums sein, z.B. als stetige Funktion, die auf einem bestimmten Intervall $[a, b]$ definiert ist. Im Folgenden ist für die Fourier-Transformation das Intervall $[0, 2\pi]$ relevant. Für die stetigen Funktionen f und g auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ definieren wir das folgende *Skalarprodukt*:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t) \cdot g(t) dt.$$

Dabei sind f und g genau dann *orthogonal*, wenn gilt:

$$\langle f, g \rangle = 0.$$

Weiterhin ist die Norm einer Funktion f definiert als:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

Wir betrachten nun die folgende Menge von Funktionen:

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(\omega \cdot t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(\omega \cdot t)}{\sqrt{\pi}} \right\}, \omega \in \mathbb{N}.$$

Diese Funktionen sind paarweise zueinander *orthogonal*, also:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t) \cdot g(t) dt = 0, \quad \forall f, g \in \mathcal{B}, f \neq g.$$

Beweis:

1. Fall:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\sin(\omega_1 \cdot t)}{\sqrt{\pi}} \\ g(t) &= \frac{\sin(\omega_2 \cdot t)}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\omega_1 \cdot t)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sin(\omega_2 \cdot t)}{\sqrt{\pi}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\int_0^{2\pi} \cos((\omega_1 - \omega_2) \cdot t) dt - \int_0^{2\pi} \cos((\omega_1 + \omega_2) \cdot t) dt \right) \quad (1) \\ &= 0, \text{ für } \omega_1 \neq \omega_2. \end{aligned}$$

Der 2. Fall (Kosinus mit Kosinus) und der 3. Fall (Kosinus mit Sinus) werden analog bewiesen. Setzt man in (1) $\omega_1 = \omega_2$, ergibt sich

$$\|f(t)\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = 1. \quad (2)$$

Aus (1), sowie den anderen beiden Fällen und (2) folgt, dass die Funktionen in \mathcal{B} eine *Orthonormalbasis* der stetigen Funktionen auf $[0, 2\pi]$ bilden.

2.2 Definition Fourier-Reihe

Für ein Signal $x(t)$ $t \in [0, 2\pi]$, x stetig, nehmen wir an, dass es geschrieben werden kann als:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + a_1 \cdot \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}} + a_2 \cdot \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}} + a_3 \cdot \frac{\cos 3t}{\sqrt{\pi}} + \dots \\ &\quad + b_1 \cdot \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}} + b_2 \cdot \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}} + b_3 \cdot \frac{\sin 3t}{\sqrt{\pi}} + \dots \end{aligned}$$

d.h. als Linearkombination der Basisfunktionen.

Diese Summe von Basisfunktionen nennt man *Fourier-Reihe* und die Darstellung eines Signales als *Fourier-Reihe* heißt *Fourier-Transformation*.

Die Anteile der einzelnen Basisfunktionen, d.h. die Faktoren $a_0, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ erhält man, indem man das Skalarprodukt des Signals $x(t)$ mit der entsprechenden Basisfunktion bildet.

Bsp. :

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \left\langle x, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \\
 &= \left\langle a_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + a_1 \cdot \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}} + a_2 \cdot \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}} + \dots + b_1 \cdot \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}} + b_2 \cdot \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}} + \dots, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \\
 &= a_0 \cdot \underbrace{\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle}_1 + a_1 \cdot \underbrace{\left\langle \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle}_0 + \dots \\
 &\quad + b_1 \cdot \underbrace{\left\langle \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle}_0 + \dots \\
 &= a_0
 \end{aligned}$$

Die Ermittlung aller anderen Faktoren erfolgt analog.

3 Beispiel einer Fourier-Transformation

Als simples Beispiel für eine *Fourier-Transformation* zerlegen wir die schon erwähnte Rechteck-Schwingung

$$x(t) = \begin{cases} 1 & : t \in [0, \pi[, \\ -1 & : t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

a_0 errechnet sich wie schon oben gezeigt:

$$a_0 = \left\langle x, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \int_0^{2\pi} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dt = \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dt - \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dt = 0.$$

a_ω , die Faktoren der Kosinus-Summanden, können durch das Bilden des Skalarprodukts der Schwingung und des Kosinus-Einheitsvektors ermittelt werden:

$$a_\omega = \left\langle x, \frac{\cos \omega t}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \int_0^{2\pi} x \cdot \frac{\cos \omega t}{\sqrt{\pi}} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\int_0^{\pi} \cos \omega t dt - \int_{\pi}^{2\pi} \cos \omega t dt \right) = 0.$$

Analog bestimmt man b_ω :

$$\begin{aligned}
 b_\omega &= \left\langle x, \frac{\sin \omega t}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \int_0^{2\pi} x \cdot \frac{\sin \omega t}{\sqrt{\pi}} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\int_0^\pi \sin \omega t dt - \int_\pi^{2\pi} \sin \omega t dt \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{-1}{\omega} \cdot \cos \omega t \Big|_\pi^0 + \frac{1}{\omega} \cdot \cos \omega t \Big|_\pi^{2\pi} \right) = \frac{1}{\omega \cdot \sqrt{\pi}} \cdot (2 - 2 \cdot \cos \omega \pi) \\
 &= \begin{cases} \frac{4}{\omega \cdot \sqrt{\pi}} & , \text{für gerade } \omega \\ 0 & , \text{für ungerade } \omega \end{cases}
 \end{aligned}$$

Demnach lässt sich die Rechteck-Schwingung als folgende Transformierte $X(t)$ annähern:

$$X(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \sin t + \frac{4}{3\pi} \cdot \sin 3t + \frac{4}{5\pi} \cdot \sin 5t + \dots$$

4 Diskrete Fourier-Transformation

Nun ist ein Signal nur an diskreten Zeitpunkten verfügbar, sprich: Man zerlegt nicht mehr stetige Funktionen in Summen von Sinus- und Kosinus-Funktionen, sondern eine endliche Anzahl an Werten, die durch Abtasten eines Signals zu diskreten Zeitpunkten zustande gekommen sind, in eine Folge der Form

$$A(z) = \frac{1}{N} (a_0 + a_1 z + \dots + a_{N-1} z^{N-1})$$

mit

$$z_k = e^{\frac{2\pi i}{N} k} = \cos \frac{2\pi}{N} k + i \cdot \sin \frac{2\pi}{N} k.$$

Die Folge

$$\sum_{k=0}^{N-1} z_k \cdot e^{\frac{2\pi i}{N} kn}$$

heißt *Diskrete Fourier-Transformation (DFT)* von x , wobei:

$$Re(X_n) = \sum_{k=0}^{N-1} \cos \frac{2\pi}{N} kn \cdot z_k,$$

$$Im(X_n) = \sum_{k=0}^{N-1} \sin \frac{2\pi}{N} kn \cdot z_k.$$

X_n gibt die Anteile der Frequenzen an, die auf $[0, N \cdot h]$ genau n Schwingungen haben. Wie sich leicht zeigen lässt, gilt $Re(X_n) = Re(X_{N-n})$ und

$Im(X_n) = -Im(X_{N-n})$. Es lassen sich also nur Frequenzen bis $\frac{n}{N \cdot h}$ für $n \leq \frac{N}{2}$ mit der DFT analysieren. Höhere Frequenzen werden auf niedrigere abgebildet (*Aliasing*).

5 Anwendung - Synthetisierung eines Instruments

Um zu verdeutlichen, dass die hier vorgestellte Theorie auch in der Praxis Anwendungen findet, stellen wir nun einige Beispielanwendungen vor.

Als erstes wird ein Ton aufgenommen. Man erhält nun eine Kurve der Schwingung über die Zeit, die man nun mittels Fourier-Transformation in die einzelnen Frequenzen aufteilen kann. Je nachdem, wie gut man das künstliche Signal an den gemessenen Ton annähern möchte, wählt man eine entsprechende Anzahl der wichtigsten Frequenzen und erhält, wenn man sie mit den entsprechenden Amplituden abspielt, den Ton des synthetisierten Instruments.

Im Anhang befinden sich einige Beispiele, bei denen links die Kurve über die Zeit zu sehen ist, rechts das Spektrum, das man durch die Fourier-Zerlegung erhält.

Nun könnte man denken, es bräuchte nichts, wenn man einen Ton synthetisieren kann, weil dabei natürlich Informationen verloren gehen. Das Lesen einer CD geschieht mit 44kHz, beim Auslassen jeder 2. Abtastung erhält man die Rundfunkqualität, die nur 22kHz beträgt, was jedoch nicht so schlimm ist, da die Signalqualität bei der Übertragung sowieso ein wenig leidet.

Nicht nur bei Musik, auch bei der Speicherung von Fotos wird dieses System verwendet. Dies ist beispielsweise zu beobachten, wenn man scharfe Übergänge (Vorzugsweise von schwarz auf weiss) im JPG-Format betrachtet, denn dann sieht man, dass außer den Farben schwarz und weiss sich an den Übergängen auch noch andere Farben, die durch "Nachschwingungen" der abgespeicherten Ersatzfunktionen entstehen.

6 Fazit

Die Möglichkeit, Speicherplatz zu sparen, indem man die Daten als Parameter von Sinusfunktionen abspeichert, ist sehr effektiv und wird im Multimedia-Bereich bereits häufig angewendet. Bei der Nutzung vieler Funktionen erhält man eine gute Näherung, kann jedoch trotzdem viel Speicherplatz sparen.

Unser Versuch, die Geige zu synthetisieren war insofern erfolgreich, als dass die synthetisierte Kurve größtenteils mit der aufgenommenen Kurve übereinstimmte. Jedoch klingt sie wegen der schlechten Aufnahmequalität und da wir nur wenige Grundfrequenzen betrachtet haben, nicht ganz wie der ursprünglich erzeugte Ton.

Jedoch könnte man sich mit mehr Aufwand dem Originalton weiter annähern. Bei der Nutzung von Spitzen und Ecken hat man das Problem, dass die Sinusfunktion von Natur aus rund ist und deshalb die Modellierung die Spitze immer abrundet. Das wird gerade dann deutlich, wenn die Funktion viele schmale Spitzen hat. Hierzu ist jedoch zu sagen, dass dies in Tondateien nur schwer oder gar nicht hörbar ist. Auch in Bildern fallen die Änderungen nicht sonderlich stark auf.

7 Anhang

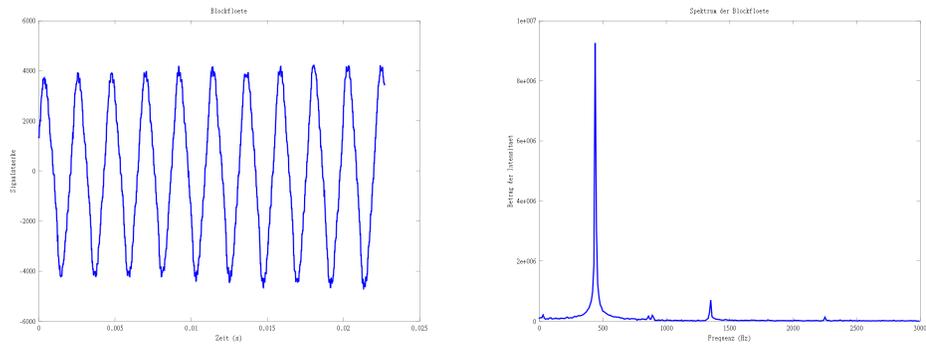


Abbildung 4: Beispiel Flöte

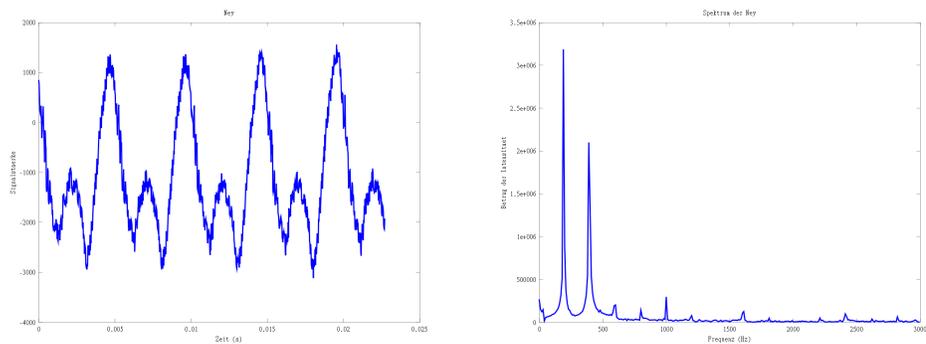


Abbildung 5: Beispiel Ney (Türkisches Blasinstrument)

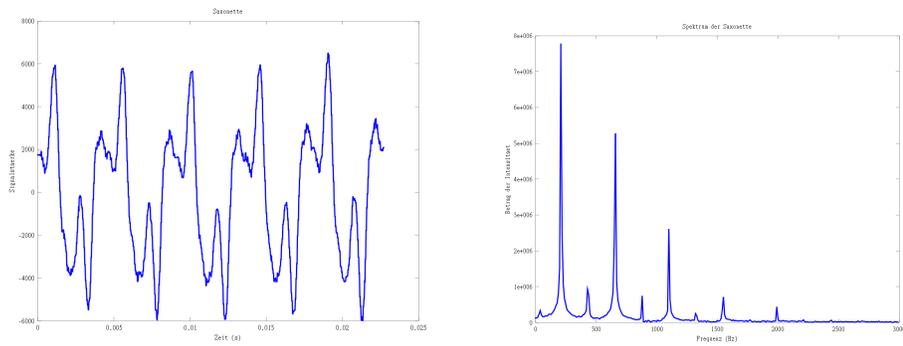


Abbildung 6: Beispiel Saxofette

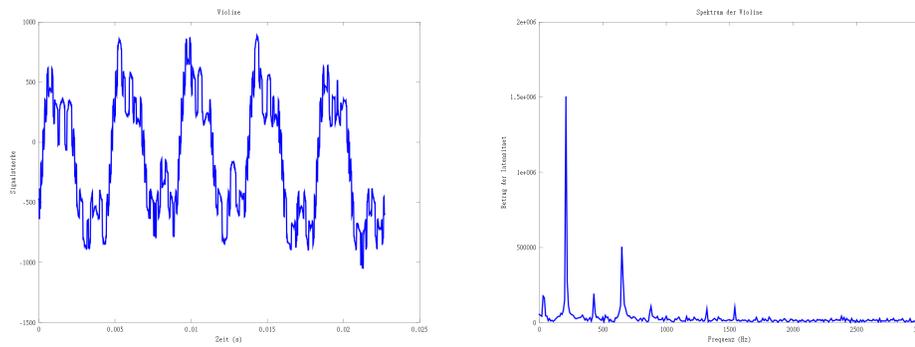


Abbildung 7: Beispiel Geige

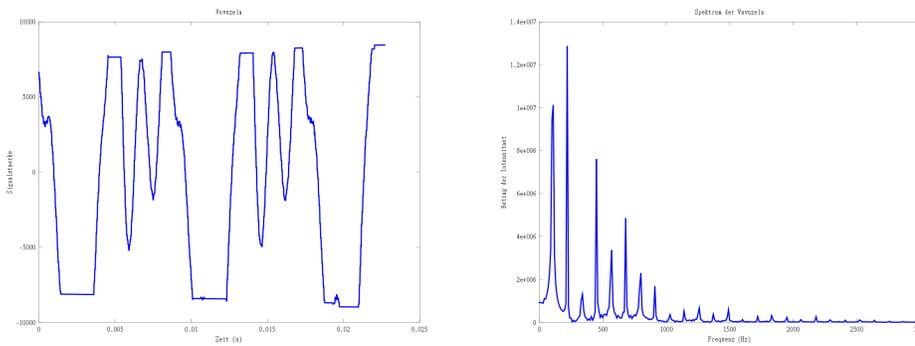


Abbildung 8: Beispiel Vuvuzela (Fantröte, passend zur WM)

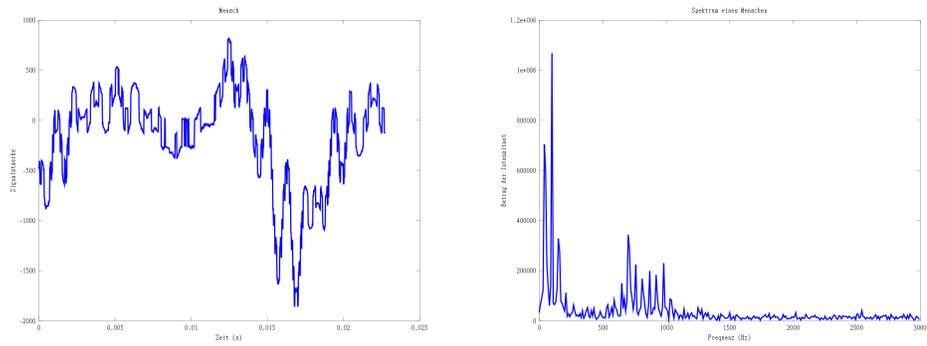


Abbildung 9: Beispiel Jonas (Mensch, tiefer Ton)

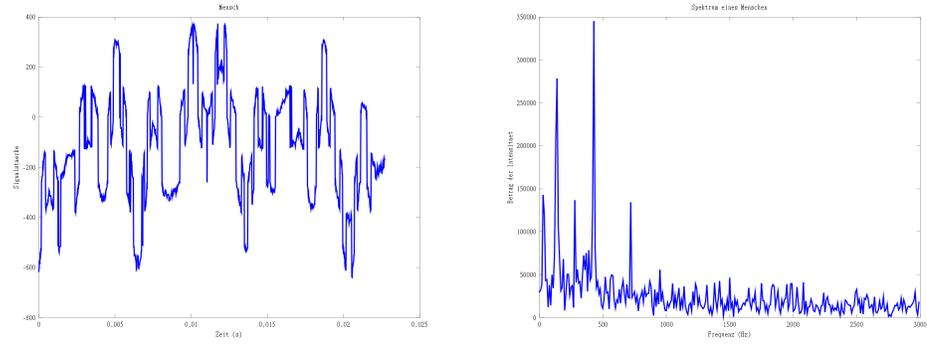


Abbildung 10: Beispiel Ling (Mensch, gehauchter Ton)

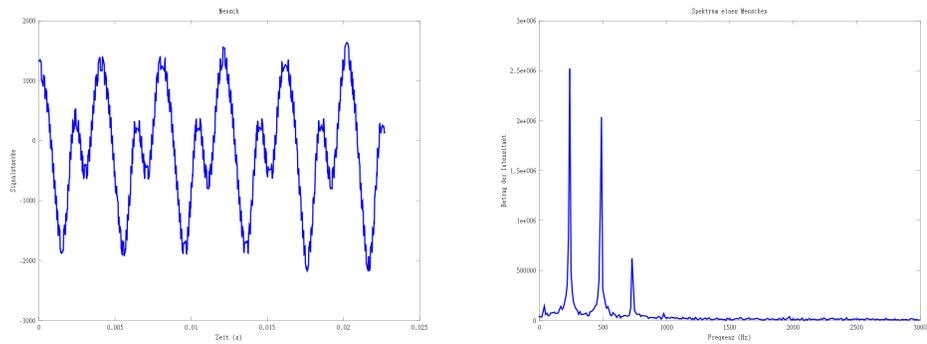


Abbildung 11: Beispiel Holger (Mensch, hoher Ton)