Komplexe Zahlen und Geometrie

Teilnehmer:

Niklas Rughöft	Herder-Oberschule
Jan Putzig	Heinrich-Hertz-Oberschule
Ron Wenzel	Heinrich-Hertz-Oberschule
Alexey Loutchko	Heinrich-Hertz-Oberschule
Joe Hannes Gerstung	Heinrich-Hertz-Oberschule
Jörn Brodthagen	Andreas-Oberschule

Gruppenleiter:

Heino Hellwig	Humboldt-Universität zu Berlin, Mitglied im DFG-Forschungszentrum MATHEON „Mathematik für Schlüsseltechnologien“

Unsere Arbeitsgruppe befasste sich mit den komplexen Zahlen und ihrer geometrischen Darstellung. Die komplexen Zahlen wurden dann zur Lösung einfacher geometrischer Probleme herangezogen. Die Inversion am Kreis und die stereographische Projektion wurden eingeführt und einige ihrer Eigenschaften bewiesen. Mit diesem Wissen konnte dann die Möbiustransformationen geometrisch gedeutet werden, welche im Kurzfilm *Möbius Transformations Revealed* auf eindrucksvolle Weise visualisiert wurden.

1 Der Körper der komplexen Zahlen

In diesem Abschnitt werden kurz die grundlegenden Eigenschaften der komplexen Zahlen wiederholt.

Definition: Die komplexen Zahlen $\mathbb{C} = \{\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \cdot, +\}$ bestehen aus den geordneten, reellen Zahlenpaaren, versehen mit einer wie folgt definierten Addition

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{1}$$

und Multiplikation

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1). \tag{2}$$

Damit die Menge der komplexen Zahlen einen Körper bildet, müssen bestimmte Bedingungen erfüllt sein. Es müssen die Assoziativgesetze, die Kommutativgesetze und die Distributivgesetze gelten. Außerdem muss die Menge der komplexen Zahlen ein Nullelement (also ein neutrales Element für die Addition), ein Einselement (also ein neutrales Element für die Multiplikation) und ein inverses Element enthalten:

- **Assoziativgesetze**:

$$((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot (x_3, y_3) = (x_1, y_1) \cdot ((x_2, y_2)) \cdot (x_3, y_3))$$
$$((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3) = (x_1, y_1) + ((x_2, y_2)) + (x_3, y_3))$$

- **Kommutativgesetze**:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_2, y_2) \cdot (x_1, y_2)$$
$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_2, y_2) + (x_1, y_2)$$

- **Distributivgesetze**:

$$(x_1, y_1) \cdot ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) + (x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3)$$
$$((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \cdot (x_3, y_3) = (x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3) + (x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3)$$

- **Existenz der neutralen Elemente**:
  a) bzgl. Multiplikation:

$$(x, y) \cdot (1, 0) = (x, y)$$

  b) bzgl. Addition:

$$(x, y) + (0, 0) = (x, y)$$

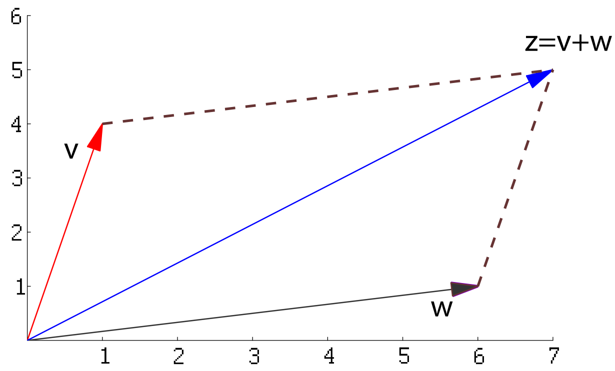

Abbildung 1: Die Addition komplexer Zahlen

- **Existenz der inversen Elemente**:
  a) bzgl. Multiplikation:
  $$(x_1, y_1) \cdot (\frac{x_1}{(x_1^2 + y_1^2)}, \frac{-y_1}{(x_1^2 + y_1^2)}) = (1, 0)$$
  b) bzgl. Addition:
  $$(x, y) + (-x, -y) = (0, 0)$$

Da alle Eigenschaften erfüllt sind, bildet die Menge der komplexen Zahlen tatsächlich einen Körper.

Dieser neue Zahlenbereich wurde geschaffen, da Gleichungen der Form

$$z^2 = -1 \tag{3}$$

in der Menge der reellen Zahlen keine Lösungen haben. Die so genannte **imaginäre Einheit i** (Euler, 1777) wird eingeführt als $i := (0, 1)$. Es gilt dann:

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Allgemein lässt sich eine komplexe Zahl z als geordnetes Paar zweier reeller Zahlen (x, y) darstellen, wobei der x-Wert den *Realteil* und der y-Wert den *Imaginärteil* der Zahl z bestimmt:

$$z = x + yi = Re(z) + Im(z)i.$$

2 Die Geometrie der komplexen Zahlen

Jede komplexe Zahl $z = x + yi$ lässt sich als Punkt $P = (Re(z), Im(z)) = (x, y)$ der Ebene geometrisch deuten. Die Addition und Multiplikation erlauben so geometrische Interpretationen. Um die Addition zweier komplexer Zahlen v und w

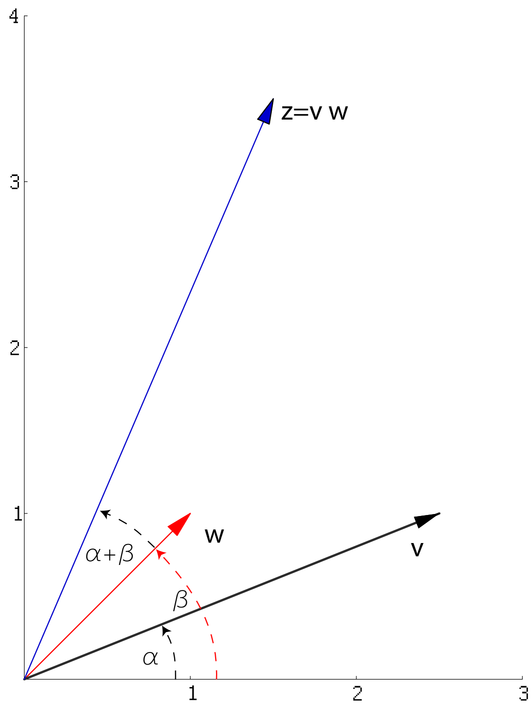

Abbildung 2: Die Multiplikation komplexer Zahlen

zu veranschaulichen, fasst man sie als Vektoren auf und verfährt nach der Parallelogrammregel, indem man v an w abträgt. Der daraus resultierende Vektor z ist die Summe der beiden komplexen Zahlen.
Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen ist geometrisch gesehen eine Drehstreckung. Um zwei komplexe Zahlen v und w in Polarschreibweise zu multiplizieren, addiert man die Winkel α und β der beiden Zahlen und multipliziert die Beträge $|v|$ und $|w|$ der beiden Zahlen.

Definitionen: Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ heißt $\overline{z} := x - iy$ die **konjugiert komplexe** Zahl. Der **Betrag** einer komplexen Zahl wird definiert durch

$$|z| := \sqrt{(z\overline{z})} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Es gilt:

$$Re(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$$

$$Im(z) = 1/2i(z - \overline{z})$$

Eigenschaften der Konjugierten:
i) $\overline{w + z} = \overline{w} + \overline{z}$
ii) $\overline{w \cdot z} = \overline{w} \cdot \overline{z}$
iii) $\overline{\overline{z}} = z$

Kreise in der Gauß'schen Zahlenebene:
In der Gauß'schen Zahlenebene gilt für den Abstand d zweier Punkte z_1 und z_2:

$$d = |z_1 - z_2|.$$

Der Kreis mit dem Mittelpunkt $M(a, b)$ und dem Radius r wird mit $K_r(M)$ bezeichnet. Er besteht aus den Punkten, die von M den Abstand r haben. Mit $M = a + bi$ gilt.

$$K_r(M) := \{z : |M - z| = r\}$$

Da beim Rechnen die Betragsstriche stören, wird umgeformt:

$$|M - z|^2 = (M - z)\overline{(M - z)} = (M - z)(\overline{M} - \overline{z})$$

Daraus folgt:

$$(M - z)(\overline{M} - \overline{z}) = r^2$$
$$z\overline{z} - \overline{M}z - M\overline{z} + M\overline{M} - r^2 = 0$$

Somit kann man Kreise in der Gauß'schen Zahlenebene wie folgt darstellen:

$$K_r(M) := \{z \in \mathbb{C} | z\overline{z} - \overline{M}z - M\overline{z} + M\overline{M} - r^2 = 0\}, \tag{4}$$

wobei $M\overline{M} - r^2$ stets eine reelle Zahl.
Komplexe Zahlen können sehr hilfreich bei geometrischen Problemen sein, die mit konventionellen Mitteln erheblich schwieriger zu lösen wären. Daher sollen die komplexen Zahlen nun genutzt werden, um einige Aufgaben der Elementargeometrie zu lösen.

Aufgabe:
Auf einer Schatzinsel stehen eine Kiefer, eine Linde und ein Galgen. Ein Pirat hat vor langer Zeit einen Schatz dort versteckt. Er ist vom Galgen zur Kiefer gegangen und ist um 270° gedreht die selbe Strecke nochmal gelaufen und hat diesen Punkt markiert.Dannach ist er vom Galgen zur Linde gegangen und ist um 90° gedreht diese Strecke nochmal gelaufen und hat diesen Punkt auch markiert. In der Mitte zwischen diesen beiden Punkten hat er den Schatz vergraben (siehe 2). Als er nach einigen Jahren wieder zurück zur Insel gekommen ist, war der Galgen weg. Wo ist der Schatz vergraben?
Lösung:
Wir legen uns über die Insel ein Koordinatensystem, sodass die Bäume an den Positionen $(-1, 0)$ und $(1, 0)$ sind. Der Galgen befindet sich ander Position $(a+bi)$. Nun verschieben wir den Galgen um 1 nach links und drehen ihn um 90° gegen den Uhrzeigersinn (durch Multiplikation mit $-i$):

$$-i((a - 1) + bi) = -ia + i + b = b + i(-a + 1).$$

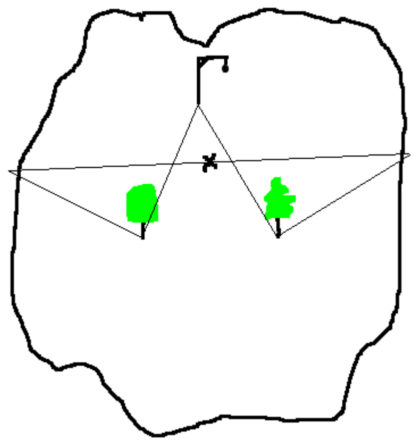

Abbildung 3: Position des Schatzes

Danach verschieben wir den Punkt wieder um 1 nach rechts: $w_1 = b + 1 + i(-a + 1)$ ist also der erste markierte Punkt. Analog machen wir dies nun für w_2 und erhalten $w_2 = -b - 1 + i(a + 1)$. Nun berechnen wir die Position des Schatzes:

$$s = \frac{w_1 + w_2}{2} = \frac{b + 1 + i(-a + 1) - b - 1 + i(a + 1)}{2} = \frac{ia - ia + 2i}{2} = i$$

Der Schatz ist also, *unabhängig* von der Position des Galgen, an der Stelle i begraben!

Satz:
Konstruiert man auf den Seiten eines beliebigen Vierecks Quadrate, so sind die Strecken, die die Mittelpunkte gegenüberliegender Quadrate verbinden, gleich lang und stehen senkrecht aufeinander.
Beweis:
Für den Beweis ziehen wir nun die komplexen Zahlen zur Hilfe. Wir wählen den Ursprung von $\mathbb{C}$ als den Punkt A und beschreiben die weiteren Eckpunkte durch Addition von den komplexen Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Die Eckpunkte haben die Darstellung:

$$B = 2a, \quad C = 2a + 2b, \quad D = 2a + 2b + 2c, \quad A = 2a + 2b + 2c + 2d$$

Unsere einzige Bedingung, damit das Viereck geschlossen ist, ist: $a+b+c+d = 0$. Um den Mittelpunkt p des Quadrates über der Strecke $\overline{AB} = 2a$ zu erhalten, nehmen wir nun erst die Hälfte der Seite und addieren die selbe Strecke im rechten Winkel zu $\overline{AB}$. Um eine komplexe Zahl um 90° gegen den Uhrzeigersinn zu drehen multiplizieren wir sie mit i:

$$p = a + ai.$$

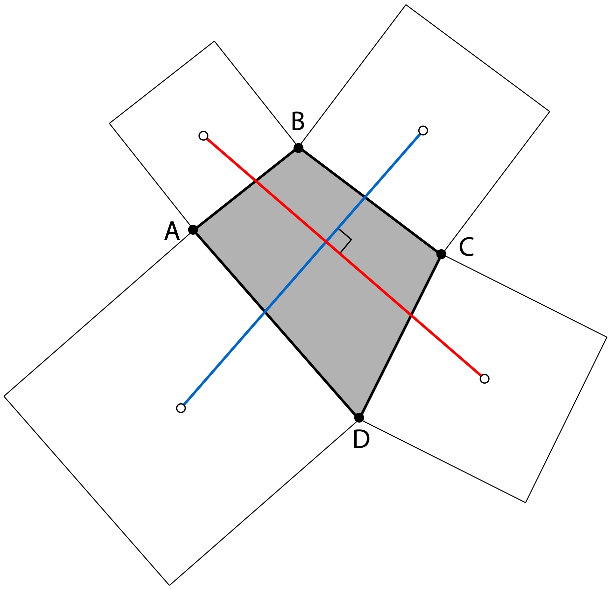

Abbildung 4: Quadrate über einem Sehnenviereck

Ebenso verfahren wir mit den anderen Quadratmittelpunkten und erhalten:

$$q = 2a + b + bi, \quad r = 2a + 2b + c + ci, \quad s = 2a + 2b + 2c + d + di.$$

Die den komplexen Zahlen $e, f \in \mathbb{C}$ mit $e = r - p$ und $f = s - q$ zugeordneten Ortsvektoren repräsentieren die Strecken zwischen den gegenüberliegenden Quadratmittelpunkten. Sie berechnen sich zu: $e = b + 2c + d + id - ib$ und $f = a + 2b + c + ic - ia$. Um nun zu zeigen, dass e und f den gleichen Betrag haben sowie orthogonal zueinander sind, müssen wir nur zeigen, dass $e + if = 0$ gilt. Wieder verwenden wir also die Multiplikation mit i, um eine Drehung um $90°$ zu erreichen:

$$e+if = b+2c+d+id-ib+ia+2ib+ic-c+a = a+b+c+d+i(a+b+c+d).$$

Nach unserer Voraussetzung gilt $a + b + c + d = 0$, also stimmt die Gleichung. q.e.d.

Weitere Anwendungen finden die komplexen Zahlen in der Zahlentheorie. Wir betrachten dazu das **Gaußsche Zahlengitter** Γ, welches aus allen Zahlen $z = a+bi$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ besteht. mit dessen Hilfe lässt sich leicht der folgende Satz beweisen lässt.

Satz (Zwei-Quadrate-Satz):
Können zwei ganze Zahlen M, N ausgedrückt werden als die Summe zweier Quadratzahlen, so gilt das auch für das Produkt.

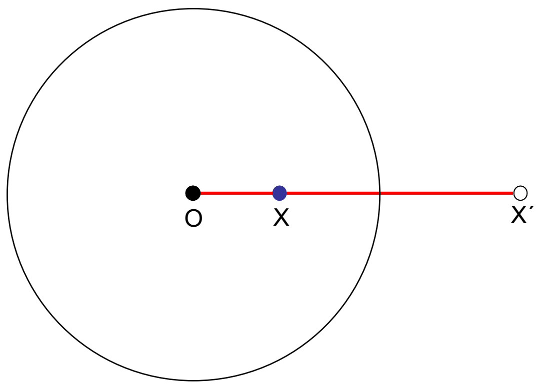

Abbildung 5: Die Inversion am Kreis

Beweis:
Sei $M = a^2 + b^2, \quad N = c^2 + d^2$ und $z = a + ib, \quad w = c + id$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.
Beachte, dass gilt: $|a + ib|^2 = (a + ib)(a - ib) == a^2 + b^2$ und $|c + id|^2 = c^2 + d^2$.
Dann ist:

$$M \cdot N = |a + ib|^2 \cdot |c + id|^2 = z\overline{z}w\overline{w} = zw\overline{zw}$$

und da $zw \in \Gamma$ gilt: $zw := u = k + il$ mit $k, l \in \mathbb{Z}$ und daher auch:

$$k^2 + l^2 = |u|^2 = u \cdot \overline{u} = M \cdot N.$$

3 Inversion am Kreis

Lineare Abbildungen der komplexen Ebene auf sich selber haben die Form:

$$f(z) = az + b,$$

wobei $a, b \in \mathbb{C}$ und $|a| = 1$ und beschreiben aus Translation und Rotation zusammengesetzte orientierungserhaltende Bewegungen. Lineare Abbildungen der Form

$$f(z) = a\bar{z} + b,$$

wobei $a, b \in \mathbb{C}$ und $|a| = 1$ beschreiben zusätzlich noch die Spiegelung und sind nicht orientierungserhaltend. Eine weitere wichtige komplexe Abbildung ist die Inversion am Kreis.

Definition: Die **Inversion oder Spiegelung am Kreis** mit Mittelpunkt O und Radius r ist die Abbildung, welche jeden Punkt X einen Punkt X' zuordnet, derart, dass X' auf der Halbgerade OX liegt und die Abstandsgleichung:

$$|OX| \cdot |OX'| = r^2$$

erfüllt.

Als komplexe Abbildung wird die Inversion am Einheitskreis durch

$$f(z) = \frac{1}{\bar{z}} \tag{5}$$

gegeben.

Eine wichtige Eigenschaft der Inversion ist:
Satz:
Die Inversion bildet Kreise auf Kreise und Geraden ab.
Beweis:
Gegeben sei ein Kreis in allgemeiner Form:

$$f(x,y) = A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

Inversion am Einheitskreis liefert für das Bild des Punktes $P(X,Y)$ den Punkt $P(x,y)$ mit $x = \frac{X}{X^2+Y^2}, \quad y = \frac{Y}{X^2+Y^2}$. Daher ist

$$f(\frac{X}{X^2+Y^2}, \frac{Y}{X^2+Y^2}) = A\frac{1}{X^2+Y^2} + B\frac{X}{X^2+Y^2} + C\frac{Y}{X^2+Y^2} + D = 0$$

D.h.: $A + Bx + Cy + D(X^2+Y^2) = 0$.
Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:
i) $D = 0- > A + Bx + Cy = 0$, also eine Gerade
ii) $A = 0- > Bx + Cy + D(x^2+y^2) = 0$, das ist ein Kreis durch den Ursprung.
$\square$

Folgerung:
Insbesondere werden Kreise durch den Ursprung auf Geraden abgebildet.

Hilfssatz:
Wir betrachten die Punkte s,t und deren Bildpunkte S,T nach Inversion am Kreis mit Radius r. Die Streckenlänge $|st|$ wird wie folgt transformiert:

$$|ST| = \frac{r^2 \cdot |st|}{|Os| \cdot |Ot|}$$

Beweis:
Es gilt:

$$\triangle Ost \sim \triangle OTS.$$

Daher ist

$$\frac{|\ st\ |}{|\ ST\ |} = \frac{|\ Os\ |}{|\ OT\ |} \tag{6}$$

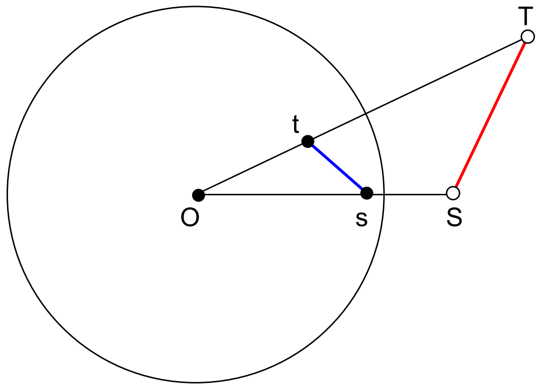

Abbildung 6: Ähnliche Dreiecke bei der Inversion am Kreis.

und wegen

$$| OT | = \frac{r^2}{| Ot |}. \tag{7}$$

Setzen wir (7) in (6) ein, so erhalten wir gerade die Behauptung.

Theorem von Ptolemaios:
Vorraussetzung: $Viereck\, ABCD\, mit\, ABCD \in Kreis\, K$.
Behauptung: Die Summe der Produkte der gegenüberliegenden Seitenlängen ist gleich dem Produkt der Diagonalenlängen:

$$|AD| \cdot |BC| + |AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |BD| \tag{8}$$

Beweis:
Wir legen einen Inversionskreis K mit D als Mittelpunkt fest, der das Viereck komplett umfasst. Dann gilt:

$$|A'B'| + |B'C'| = |A'C'|$$

Mit obigem Hilfssatz folgt:

$$|A'B'| = \frac{r^2 \cdot |AB|}{|AD||BD|} \qquad |B'C'| = \frac{r^2 \cdot |BC|}{|BD||CD|} \qquad |A'C'| = \frac{r^2 \cdot |AC|}{|AD||CD|}.$$

Also:

$$\frac{|AB|}{|AD||BD|} + \frac{|BC|}{|BD||CD|} = \frac{|AC|}{|AD||CD|}$$

und daher:

$$|AB||CD| + |BC||AD| = |AC||BD| \quad \square$$

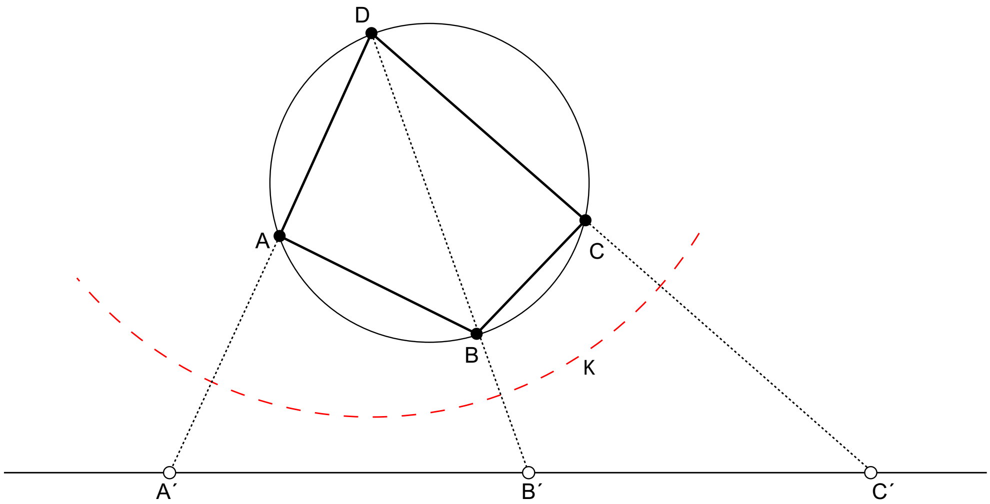

Abbildung 7: Anwendung der Inversion beim Beweis des Theorems von Ptolemaios.

4 Die stereografische Projektion

Da die Stützung $f(z) = \frac{1}{z}$ und die Inversion $g(z) = \frac{1}{\bar{z}}$, Kreise nicht nur auf Kreise und Geraden nicht nur auf Geraden, sondern auch Kreise auf Geraden und Geraden auf Kreise abbilden, ist es sinnvoll, diese Abbildungen nicht in der Zahlenebene sondern auf einer Kugel zu untersuchen. Die RIEMANN'schen Zahlenkugel hat den Radius $\frac{1}{2}$ und ihr Südpol liegt auf dem Ursprung. Die Stereografische Projektion ist die Abbildung, die jeden Punkt auf der Oberfläche der RIEMANN'schen Zahlenkugel einem Punkt der GAUSS'schen Zahlenebene zuordnet. Hierfür wird eine Gerade durch den Nordpol der Zahlenkugel und den entsprechenden Punkt auf der Kugeloberfläche gelegt. Der Schnittpunkt dieser Gerade mit der Zahlenebene ist der gesuchte Punkt auf der Zahlenebene. Der Nordpol N (0,0,1) wird dabei dem formal eingeführten Punkt P_∞ zugeordnet. Punkte der Ebene werden auf die gleiche Weise Punkten der Kugeloberfläche zugeordnet. Interessanterweise werden Geraden und Kreise immer als Kreise auf die Kugeloberfläche projiziert. Der Beweis, dass jede Gerade als Kreis abgebildet wird ist denkbar einfach:
Da die Schnittlinie einer Ebene und einer Kugel stets ein Kreis ist, ist auch das Bild einer beliebigen Gerade ein Kreis durch den Nordpol. Dieser Kreis entspricht der Schnittlinie von Kugel und Ebene, in der sowohl die Gerade, als auch der Nordpol liegt.

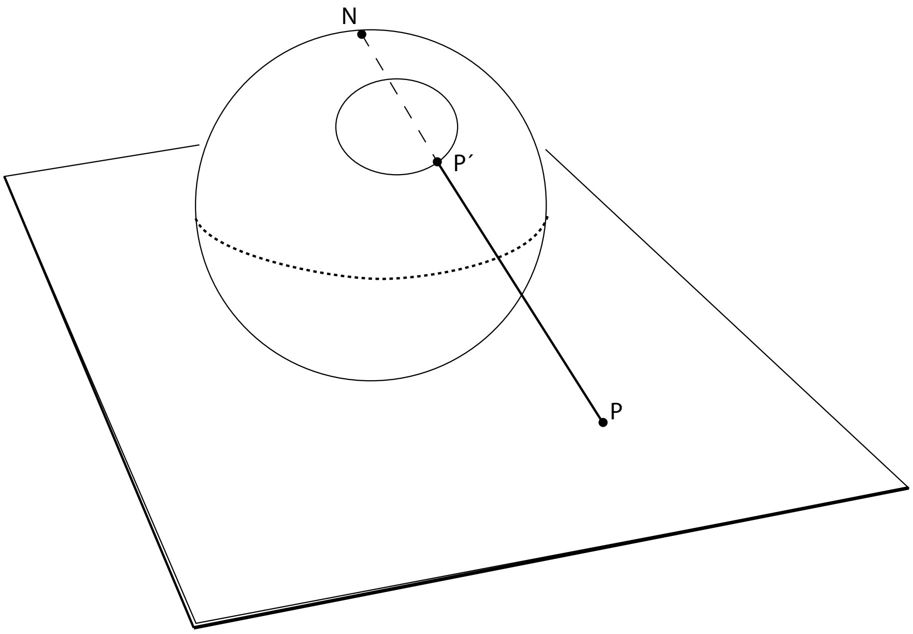

Abbildung 8: Die stereografische Projektion.

Satz:
Kreise werden bei der stereografischen Projektion wieder auf Kreise abgebildet.
Beweis:
Wir ziehen eine Gerade durch die Punkte N(ordpol) (0,0,1), P'(u,v,w) und P (x,y,0). Ausgehend von $(0,0,1)+\lambda((x,y,0)-(0,0,1))$ erhalten wir die Gerade $g:(\lambda x, \lambda y, -\lambda+1)$. Durch Einsetzen in die Kugelgleichung $u^2+v^2+(w-\frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2$, ergibt sich hier die Gleichung:

$$(\lambda x)^2+(\lambda y)^2+(-\lambda+\frac{1}{2})^2=(\frac{1}{2})^2 \tag{9}$$

Davon ausgehend, das λ verschieden von 0 ist, ergibt sich:

$$(u,v,w)=\frac{(x,y,x^2+y^2)}{x^2+y^2+1} \tag{10}$$

Setzen wir diese Formeln für die entsprechenden Variablen in eine Ebenengleichung $au+bv+cw=d$ ein, so erhalten wir nach Umstellen:

$$ax+by=(d-c)(x^2+y^2)+d \tag{11}$$

Dies ist die die Gleichung für einen Kreis in der komplexen Ebene.

Wie wirkt sich die Inversion am Einheitskreis auf die Punkte der Zahlenkugel aus? Es gilt:

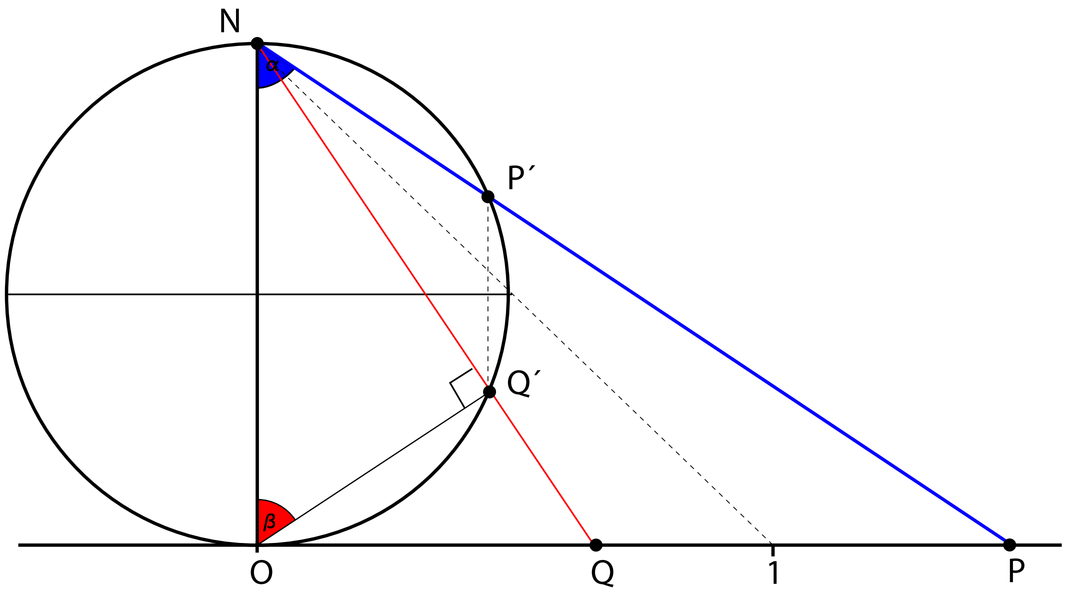

Abbildung 9: Spiegelung am Äquator und Inversion am Einheitskreis.

Satz:
Die Inversion am Einheitskreis entspricht in der Zahlenkugel einer Spiegelung am Äquator.
Beweis:
Wir betrachten die Punkte P, Q und deren Bildpunkte P', Q' nach der stereografischen Projektion. Es gilt dann:

$$\triangle NOP' \sim \triangle Q'ON,$$

da beide Dreiecke rechtwinklig sind und für die Kathetenverhältnisse

$$\frac{1}{|OP|} = \frac{|OQ|}{1}$$

gilt. Daher sind die Winkel $\angle ONP$ und $\angle Q'ON$ gleich groß, was bedeutet, dass Q' das Spiegelbild von P' am Äquator ist.

5 Die Möbiustransformationen

Eine Möbiustransformation ist eine Abbildung der Form

$$w = M(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

wobei $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ und $ad - bc \neq 0$.
i) Ist $c = 0$, so ist

$$w = M(z) = \frac{az + b}{d} = a'z + b,$$

d.h. die Möbiustransformation ist in diesem Fall eine Verknüpfung einer Skalierung (um $|a'|$), einer Drehung (um $arg(a')$) und einer Translation (um b).
ii) Ist $c \neq 0$, so setze $D := ad - bc$. Dann ist

$$w - \frac{a}{c} = \frac{az + b}{cz + d} - \frac{a}{c} = \frac{-D}{c(cz + d)}.$$

Die Möbiustransformation ist in diesem Fall eine Verknüpfung von:
a) Verschiebungen (Translationen)
b) Drehstreckungen
c) Inversion am Einheitskreis und
d) Spiegelung an der x-Achse.
Mit Hilfe der RIEMANN'schen Zahlenkugel können Möbiustransformationen veranschaulicht werden:
- Translationen entsprechen Verschiebungen der Kugel.
- Drehungen entsprechen Rotationen der Kugel entlang der vertikalen Achse.
- Streckungen entsprechen dem Anheben oder Absenken der Kugel.
- Inversionen am Kreis entsprechen Spiegelungen am Äquator.
Dieses wurde im Kurzfilm *Moebius Transformations Revealed* von Arnold und Rogness (http://www.ima.umn.edu/ arnold/moebius/) gezeigt.

6 Literaturhinweise

- Niederdrenk-Felgner, C.: Themenheft: Komplexe Zahlen. Klett Verlag (2004).
- Rademacher, H.: Higher Mathematics from an Elementary Point of View, Birkhäuser, Boston u.a. (1982).
- Bakelman, I.J.: Spiegelung am Kreis, Leipzig (1976).