Natur der Zahlen und Zahlen der Natur

Teilnehmer:

Artur Wiebe	Immanuel-Kant-Oberschule, Berlin
Jonas Knapp	Ceciliengmynsium, Bielefeld
Pierre Vallon	Herder-Oberschule, Berlin
Ron Wenzel	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin
Tobias Theis	Gymnasium Wülfrath
Vo Tran Van	Andreas-Oberschule, Berlin

Gruppenleiter:

Werner Kleinert	Humboldt-Universität zu Berlin

In der Natur gibt es viele „unbequeme Zahlen“, wie zum Beispiel das Verhältnis von Kreisumfang und Durchmesser: π. Unsere Gruppe beschäftigte sich hauptsächlich damit, wie man solche Zahlen mithilfe von Brüchen approximieren kann. Hierfür wurden sowohl die Kettenbrüche als auch die Farey-Folgen untersucht und ihre Eigenschaften bewiesen. Desweiteren haben wir die interessanten mathematischen Eigenschaften der Fibonacci-Folge untersucht, die sehr häufig in der Natur auftaucht (wie zum Beispiel bei der Vermehrung von Hasen) und auch in Verbindung mit dem ebenfalls häufig in der Natur vorkommenden Goldenen Schnitt steht. Neben den Zahlen, die häufig in der Natur vorkommen, haben wir uns zunächst mit der Natur der Zahlen also der Zahlentheorie beschäftigt.

Aus Platzgründen sind wir leider gezwungen, längere Beweise in ihren technischen Einzelheiten auszulassen.

Wir wünschen Ihnen viel Spaß, unseren Bericht über die „Natur der Zahlen und Zahlen der Natur“ zu lesen.

1 ggT und Euklidischer Algorithmus

Am Anfang unserer Gruppenarbeit standen einige grundlegende Ausschnitte aus der Zahlentheorie (z.B. Primzahlen, ggT, ...). Im Zusammenhang mit dem größten gemeinsamen Teiler zweier natürlicher Zahlen a und b ($ggT(a,b)$) haben wir den Euklidischen Algorithmus, ein Verfahren zur Bestimmung des $ggT(a,b)$, behandelt.
Der Euklidische Algorithmus lautet wie folgt:

$a = v_0 \cdot b + r_1$
$b = v_1 \cdot r_1 + r_2$
$r_1 = v_2 \cdot r_2 + r_3$
...
$r_k = v_{k+1} \cdot r_{k+1} + r_{k+2}$
$r_{k+1} = v_{k+2} \cdot r_{k+2}$

Dabei ist der kleinste von Null verschiedene Rest ($r_{k+2} \neq 0$ ($r_{k+3} = 0$)) der ggT(a,b).

2 Kettenbrüche

Rationale Kettenbrüche

Sei (a,b) $\in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Wir sind an $\frac{a}{b}$ interessiert.

Diesen Bruch können wir mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus wie folgt ermitteln:

$a = v_0 \cdot b + r_1 \Longrightarrow \frac{a}{b} = v_0 + \frac{r_1}{b} = v_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}}$.

Den Bruch $\frac{b}{r_1}$ können wir ersetzen, nachdem wir die zweite Zeile des Euklidischen Algorithmus' umgeformt haben: $b = v_1 \cdot r_1 + r_2 \Longrightarrow \frac{b}{r_1} = v_1 + \frac{r_2}{r_1}$.

Dieses Verfahren lässt sich bis zur letzten Zeile des Euklidischen Algorithmus' durchführen, sodass wir zum Schluss einen endlichen, abbrechenden bzw. rationalen Kettenbruch erhalten.

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{v_1 + \frac{1}{v_2 + \frac{1}{v_3 + \frac{1}{v_4 + \dots}}}}$$

Definition: Sei $(a_0, ..., a_n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ein Tupel natürlicher Zahlen.
Dann heißt der iterierte Bruch

$$\cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a3 + \dots \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}}$$

der (endliche) Kettenbruch zu $(a_0,...,a_n)$.
Fazit: Jeder Bruch $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, a > 0$, ist durch einen Kettenbruch darstellbar.

Schreibweise, Motivation, Näherungsbrüche

Kettenbrüche lassen sich vereinfacht darstellen. Um nicht die u.U. sehr großen Kettenbrüche „ausschreiben" zu müssen, haben wir folgende Schreibweise verwendet:

$$[a_0, ..., a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \dots \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}}.$$

Doch warum wandeln wir Brüche in unter Umständen äußerst unübersichtliche und komplexe Kettenbrüche um?
Das Ziel der Kettenbruchentwicklung besteht darin, einen Bruch $\frac{a}{b}$ durch Näherungsbrüche aus der Kettenbruchentwicklung zu approximieren. Die verwendeten Näherungsbrüche sollen dann kleinere Zähler und Nenner als $\frac{a}{b}$ haben.

Definition: Sei $[a_0,...,a_n]$ ein endlicher Kettenbruch, also

$$[a_0, ..., a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a3 + \dots \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

und sei $0 \leq k \leq n$.
Dann heißt der (Teil-)Kettenbruch $[a_0,...,a_k]$ der „k-te Näherungsbruch von $[a_0, ..., a_n]$".

Zu erwähnen ist noch, dass die Kettenbruchentwicklung nur dann nicht eindeutig ist, wenn $a_n = 1$ gilt. Daher werden nur Kettenbrüche mit $a_n \neq 1$ als „regulär" bezeichnet.

Beispiel – Näherungsbruch

Aufgabe: Finde einen Näherungsbruch $\frac{a}{b}$ für den Bruch $\frac{1355}{946}$ derart, dass $a < 100$, $b < 100$ und $|\frac{1355}{946} - \frac{a}{b}| < 10^{-4}$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1355}{946} &= 1+\tfrac{409}{946} &&= 1+\tfrac{1}{\frac{946}{409}} &&= 1+\tfrac{1}{2+\frac{128}{409}} &&= \tfrac{1}{2+\frac{1}{\frac{409}{128}}}\\
&= 1+\tfrac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{25}{128}}} &&= \dots &&= 1+\tfrac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{5+\frac{1}{8+\frac{1}{3}}}}} &&= [1,2,3,5,8,3]
\end{aligned}$$

Näherungsbrüche:
1. Näherungsbruch: $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, $|\frac{1355}{946}-\frac{a}{b}| \approx 0{,}068$
2. Näherungsbruch: $1+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}=\frac{10}{7}$, $|\frac{1355}{946}-\frac{10}{7}| \approx 0{,}00378$
3. Näherungsbruch: $1+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{5}}}=\frac{53}{37}$, $|\frac{1355}{946}-\frac{53}{37}| \approx 8{,}57\cdot 10^{-5}$

Beispiel – Sonnensystem

Approximationen von rationalen Zahlen durch Näherungsbrüche aus der Kettenbruchentwicklung hat es schon in der Vergangenheit gegeben.
Im nächsten Teil unserer Gruppenarbeit haben wir den Physiker Christiaan Huygens (1629-1695) und sein „Zahnrad-Modell“ betrachtet. Huygens wollte die Umlaufzeiten der Planeten unseres Sonnensystems um die Sonne darstellen. Dabei sollte jeder Planet durch ein Zahnrad symbolisiert werden und jedes Zahnrad sollte genau so viele Zähne haben, wie der Planet Minuten für eine Sonnenumrundung braucht.
Das Problem, das sich für Huygens ergab, sowie dessen Lösung wollen wir exemplarisch anhand des Saturns und der Erde darstellen:

$$a=\frac{\text{Zahnradzahl}_{\text{Saturn}}}{\text{Zahnradzahl}_{\text{Erde}}}=\frac{\text{Umlaufzeit}_{\text{Saturn}}}{\text{Umlaufzeit}_{\text{Erde}}}=\frac{77708431}{2640853}.$$

Huygens hätte also riesige Zahnräder mit Millionen von Zähnen benötigt, welche weder technisch noch finanziell zu beschaffen waren.
Für ein realistisches Modell brauchte er einen Bruch mit deutlich kleinerem Zähler und Nenner, der aber nicht zu stark vom Original-Bruch abweicht. Zur Lösung seines Problems bildete er erst den Kettenbruch von

$$a=[29,2,2,1,5,1,4,1,1,2,1,6,1,10,2,2,3]$$

und benutzte für sein Modell den 3. Näherungsbruch $[29,2,2,1]=\frac{206}{7}$. Die Abweichung vom Original-Bruch beträgt hierbei weniger als 0.003, was für Huygens akzeptabel war.
Bemerkung: Leser, die unseren, ohne Rechnung aufgeführten Zahlen nicht trauen, dürfen gerne selbst nachrechnen.

Beispiel – Kalendermodelle

Die Umlaufzeit der Erde um die Sonne beträgt $365 + \frac{104629}{432000}$ Tage
Kettenbruchentwicklung von $x := \frac{104629}{432000} = [0,4,7,1,3,6,2,1,170]$
0. Näherungsbruch: 0
Verwendet man 0 als 0. Näherungsbruch, so rechnete man mit einer Jahreslänge von 365 Tagen. Historisches Beispiel: „alte Ägypter“.
Korrektur: Nach einem längerem Zeitram wird ein Jahr um gleich mehrere Tage verlängert.

1. Näherungsbruch: $\frac{1}{4}$
Hierbei ist $\frac{1}{4}$ als Näherungsbruch etwas zu groß.
Historisch: Caesar (46 v.Chr.) führt dieses Modell ein.
Nachteil: Kalenderzeit eilt der meterologisch Zeit etwas voraus.
Ausgleich: Einführung von Schaltjahren (alle 4 Jahre ein Schaltjahr).
Effekt: Im 16. Jhd betrug dennoch die Differenz zwischen julianischer Kalenderzeit und meterologischer Kalenderzeit ca. 10 Tage.

2. Näherungsbruch: nicht verwendet! Weitere Näherungsbrüche wurden ebenfalls nicht verwendet wegen numerischer Kompliziertheit.
$\vdots$
Variante: Papst Gregor XIII (1582): Einführung des gregorianischen Kalenders.
Idee: Verwenden des 5. Näherungsbruch: $[0,4,7,1,3,6] = \frac{194}{801} < \frac{104629}{432000} < \frac{1}{4}$ Dabei ist $\frac{194}{801}$ etwas zu klein, aber bei der Verwendung dieses Näherungsbruches eilt nun die meteorologische Jahreszeit der Kalenderjahreszeit etwas voraus.

Festlegung:

- $\rightarrow$ Ein Jahr hat 365 Tage.
- $\rightarrow$ Alle 4 Jahre ist ein Schaltjahr.
- $\rightarrow$ Innerhalb von 800 Jahren müssen 6 Schaltjahre ausfallen!
- $\rightarrow$ Regelung: Es fallen diejenigen Jahre als Schaltjahre aus, deren Jahreszahl duch 100 teilbar ist, nicht aber duch 400.

3 Approximation irrationaler Zahlen durch Brüche

Viel wichtiger als die Approximation von rationalen Zahlen $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, a > 0, b > 0$, durch die Näherungsbrüche ihrer Kettenbrüche ist aber die Approximation irrationaler Zahlen $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ durch rationale Zahlen. (Man möchte für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ Brüche $\frac{a}{b}$ finden derart, dass $\mid \alpha - \frac{a}{b} \mid$ beliebig klein gemacht werden kann.)

Algorithmus zum Erstellen von Kettenbrüchen irrationaler Zahlen

Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $\alpha > 0$.
Dann kann man mit folgendem Algorithmus den (unendlichen) Kettenbruch von α ermitteln. $\alpha = \lfloor \alpha \rfloor + (\alpha - \lfloor \alpha \rfloor)$, wobei $\lfloor \alpha \rfloor$ das größte Ganze von α ist.
$\alpha = \lfloor \alpha \rfloor + \frac{1}{\frac{1}{\alpha - \lfloor \alpha \rfloor}}$; $\lfloor \alpha \rfloor =: a_0$
$\alpha = a_0 + \frac{1}{\frac{1}{\alpha - a_0}}$
Wegen $0 < \alpha - a_0 < 1$ wird $\frac{1}{\alpha - a_0} > 1$
$\alpha_1 := \frac{1}{\alpha - a_0}; a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor$
$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\alpha_1 - a_1}}$
So fortfahrend, ergibt sich eine nicht abbrechende Kettenbruchentwicklung für α:
$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$

Konvergenz von Kettenbrüchen

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \geq 0$ eine Folge von natürlichen Zahlen, wobei a_0 auch 0 sein darf.
Frage: Konvergiert die rationale Zahlenfolge der endlichen Kettenbrüche $[a_0, \ldots, a_n]$ für $n \to \infty$?
Antwort: Ja!

Hauptsatz über Kettenbrüche

Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ eine irrationale Zahl, $\alpha > 0$. Dann liefert der Kettenbruchalgorithmus für α die Näherungsbrüche $[a_0, \ldots, a_n], n \in \mathbb{N}$. Die Folge $([a_0, \ldots, a_n]_{n \in \mathbb{N}})$ konvergiert gegen α. Weiterhin gilt die Abschätzung

$$\mid \alpha - [a_0, \ldots, a_n] \mid < \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}.$$

Satz (Euler-Lagrange)

Eine besondere Rolle spielen die periodischen Kettenbrüche, so ist zum Beispiel $[a, \overline{2a}] = \sqrt{a^2+1}$. Im folgendem werden die periodischen Kettenbrüche charakterisiert: α kann durch einen periodischen Kettenbruch $[a_0, \ldots, a_k, \overline{b_1, \ldots, b_r}]$ dargestellt werden, genau dann, wenn α eine quadratische Irrationalzahl ist, d.h.: α ist Nullstelle einer ganzzahligen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{Z}, a \neq 0$.

4 Fibonacci-Zahlen

Definition

Die rekursiv definierte Zahlenfolge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \geq 0$ mit
$F_0 := 0$
$F_1 := 1$
$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ heißt auch "Fibonacci-Folge".
Mit Matrizen kann man das Bildungsgesetz für die Fibonacci-Zahlen F_n bequem so interpretieren.

$$\begin{pmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_{n-2} \\ F_{n-2} & F_{n-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$$

Kettenbruchentwicklung bei Fibonacci-Zahlen

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt für die Quotienten zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen F_n und F_{n+1}:
Die Kettenbruchentwicklung von $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ ist $[1,\ldots,1,2] = [1,\ldots,1,1,1]$. Zudem existiert der Limes $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$. Es gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
α ist hierbei der Goldene Schnitt und hat die Kettenbruchentwicklung $[1, \overline{1}]$.

Bemerkung (Goldener Schnitt)

Sei eine Strecke der Länge 1 gegeben. Sei die Strecke unterteilt in zwei Teilstrecken, so dass das Teilungsverhältnis von der kleineren Strecke zu größeren Strecke gleich dem

Teilungsverhältnis von der größeren Strecke zu Gesamtstrecke ist. Dann ist das Teilungsverhältnis $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Satz 6 (Formeln von Binet)

Die Formel von Binet gibt die explizite Formel für die n-te Fibonaccizahl an:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot ((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n).$$

5 Farey-Folgen oder Farey-Brüche

Neben der Verwendung von Kettenbrüchen zur Approximation von reellen Zahlen durch rationale Zahlen, spielen auch die sogenannten Farey-Folgen eine wichtige Rolle. Diese wollen wir kurz erklären.

Definition

Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
$F'_n = \left\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} | b \neq 0, b > 0, b \leq n, ggT(a,b) = 1\right\}$ heißt Farey-Menge vom Typ n.
Bem.: Sei $\frac{a}{b} \in F'_n$. Dann ist $a = q \cdot b + r$, $0 \leq r < b$ und damit $\frac{a}{b} = \frac{q \cdot b + r}{b} = q \cdot \frac{r}{b}$, $q \in \mathbb{Z}$, $\frac{r}{b} \in F'_n \cap [0,1]$
Anders gesagt: F'_n ist die Menge, derjenigen gekürzten Brüche, deren Nenner eine vorgegebene Zahl n nicht übersteigt.
Bez.: $F_n := F'_n \cap [0,1]$
Damit: $F'_n = \mathbb{Z} + F_n := \{m + \alpha | m \in \mathbb{Z}, \alpha \in F_n\}$
Def: Eine Farey-Folge von Typ n ist die Folge der Elemente aus F_n, die der Größe nach (aufsteigend) geschrieben sind.

Satz 1

Sei $\overline{F_n}$ eine Farey-Folge vom Typ $n \geq 2$. Dann gilt: Sind $\frac{a}{b}$ und $\frac{a'}{b'}$ benachbarte Glieder von $\overline{F_n}$, so gilt $|a \cdot b' - b \cdot a'| = 1$.

Satz 2

Seien wieder $\frac{a}{b}$ und $\frac{a'}{b'}$ benachbarte Elemente aus $\overline{F_n}$. Für die Mediante $\frac{a+a'}{b+b'}$ gilt: $\frac{a}{b} < \frac{a+a'}{b+b'} < \frac{a'}{b'}$.
Außerdem ist die Mediante der Brüche, die zwischen $\frac{a}{b}$ und $\frac{a'}{b'}$ liegen, derjenige mit dem kleinsten Nenner.

Der folgende Satz gibt Auskunft über die Approximationsgüte mittels Farey-Brüchen:

Satz 3 (Approximationssatz von G. L. Dirichlet)

Sei $r \in \mathbb{R}$, $0 < r < 1$, und sei $n \in \mathbb{N}$ eine vorgegebene Nennerschranke für approximierende Brüche für r. Dann existiert ein Farey-Bruch $\frac{a}{b} \in \overline{F_n}$ mit

$$|r - \frac{a}{b}| < \frac{1}{b(n+1)} \leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$