

# Kurven

## *Teilnehmer:*

Felix André	Herder-Oberschule, Berlin
Dennis Hensel	Andreas-Oberschule, Berlin
Vasco Lange	Immanuel-Kant-Oberschule, Berlin
Sebastian Liscow	Andreas-Oberschule, Berlin
Lea Nürnberger	Herder-Oberschule, Berlin
Sebastian Petzold	Immanuel-Kant-Oberschule, Berlin
Leander Rolef	Herder-Oberschule, Berlin

## *Gruppenleiter:*

Andreas Filler	Humboldt-Universität zu Berlin
----------------	--------------------------------

Kurven bieten vielfältige Möglichkeiten Muster und Formen zu beschreiben, wie es mit reellwertigen Funktionen nicht möglich ist. Durch Überlagerungen und die Wahl geeigneter Parameter entstehen faszinierende Grafiken, wie die in der untenstehenden Abbildung zu sehende, auf eine Kugel projizierte Lissajous-Kurve. Im Folgenden wird der geneigte Leser in den Genuss der vielfältigen Eigenschaften und Besonderheiten von Kurven gelangen sowie einige Elemente der Vektorrechnung antreffen.

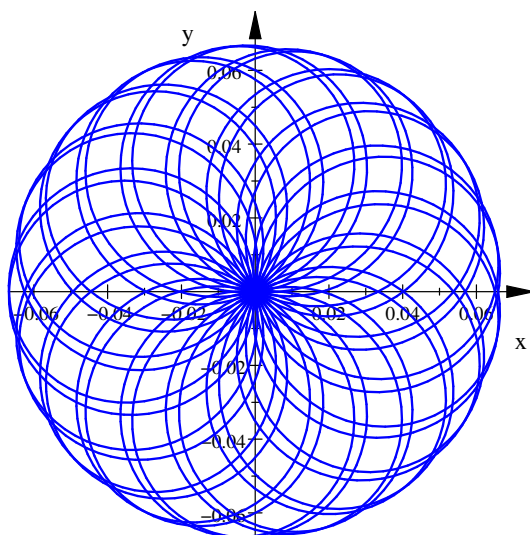


Abbildung 1: Auf Kugel projizierte Lissajous-Kurve

# 1 Parameterdarstellungen

## 1.1 Wann benötigt man Parameterdarstellungen?

In der Schule hat man den Begriff des Funktionsgraphen kennengelernt. Dieser ist als die Menge aller Punkte im kartesischem Koordinatensystem definiert, deren  $y$ -Koordinate gleich dem Funktionswert einer Funktion  $f$  ist, wenn man die  $x$ -Koordinate als Parameter nutzt. Daraus ergibt sich jedoch, dass es an jeder Stelle entlang der  $x$ -Achse maximal einen  $y$ -Wert gibt. Somit ist in der Abbildung 2 kein Funktionsgraph dargestellt.

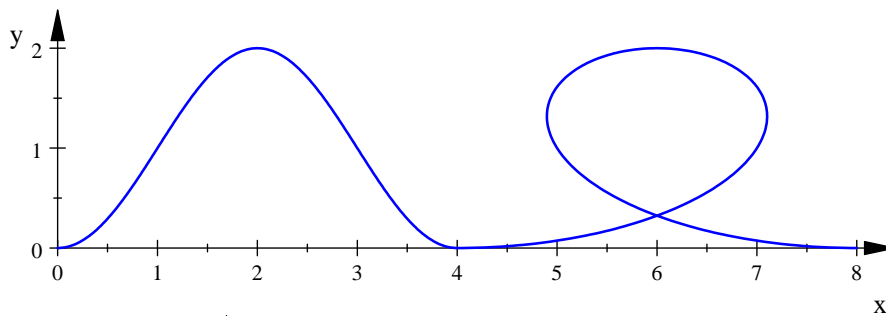


Abbildung 2: kein Funktionsgraph

Die Abbildung zeigt eine Kurve. Um solch eine Kurve darzustellen, ist es nötig, sich von der Darstellungsweise  $y = f(x)$  zu trennen. Anstelle dieser Darstellung wird sowohl für die Position auf der  $x$ -Achse, als auch für die Position auf der  $y$ -Achse eine Gleichung in Abhängigkeit eines gemeinsamen Parameters  $t$  angegeben:  $x = x(t)$  und  $y = y(t)$ . Das ist die Parameterdarstellung.

## 1.2 Definition der Kurve

*Definition:* Eine Kurve ist eine Punktmenge  $c \in \mathbb{R}^2$ .  $c$  ist die Menge der Punkte  $(x(t) \mid y(t))$  mit  $t \in I \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Es wird Stetigkeit von  $x(t)$  und  $y(t)$  verlangt um von einer Kurve zu sprechen und im Allgemeinen wird mehrfach stetige Differenzierbarkeit vorausgesetzt.

## 1.3 Beispiel der Parameterdarstellung am Kreis

Wie sieht die Parameterdarstellung nun genau aus? Als erstes Beispiel dazu wird der Kreis gewählt.

Erinnert man sich an Sinus und Kosinus am Einheitskreis, so war für jeden Punkt auf dem Kreisbogen der Kosinus als die  $x$ -Koordinate definiert und der Sinus als der Wert auf der  $y$ -Achse. Multipliziert man nun also Sinus und Kosinus mit dem Radius, so ergeben sich daraus die Werte für  $x$  und  $y$ .

$$\begin{aligned}x(t) &= r \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t) \\y(t) &= r \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t)\end{aligned}$$

Ein Kreis wie in Abbildung 3 ist die vielleicht einfachste Kurve, die nicht als Graph darstellbar ist.

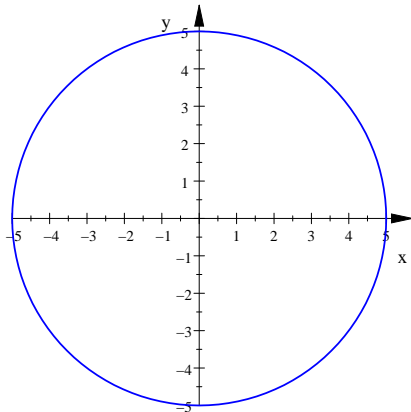


Abbildung 3: Ein Kreis mit dem Radius  $r = 5$  und dem Mittelpunkt  $M(0 | 0)$

## 2 Beispielkurven

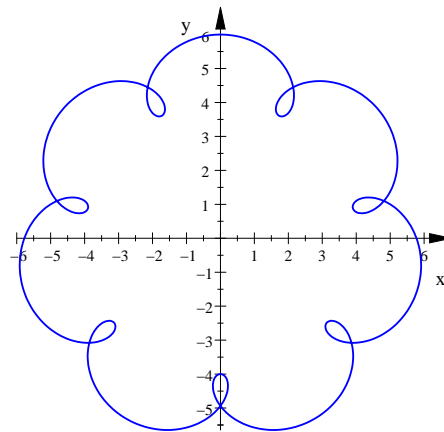
Modifiziert man die benannten Gleichungen für den Kreis, so gelangt man zu anderen, komplizierteren Gebilden. Einige der schönsten Kurven wollen wir hier vorstellen.

### 2.1 Zwei Blumen

#### Überlagerung von zwei Kreisen

An jedem Punkt des großen Kreises wurden die Koordinaten eines zweiten (kleineren) Kreises hinzuaddiert. Insgesamt wurde der große Kreis um acht kleinere Kreise ergänzt.

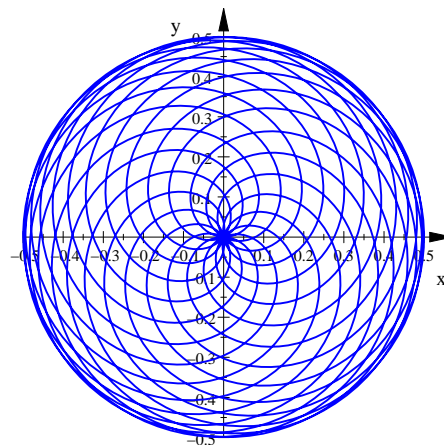
$$\begin{aligned} x(t) &= \sin(16\pi t) + r \sin(2\pi t) \\ y(t) &= \cos(16\pi t) + r \cos(2\pi t) \end{aligned}$$



#### Abstandsänderung

Diese Blume entstand, indem ein Kreis gezeichnet wurde, der Radius beim Zeichnen jedoch geändert wurde.  $t$  läuft von 0 bis zu einem Vielfachen von  $\pi$ .

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(t) \sin(t) \cos(2\pi t) \\ y(t) &= \cos(t) \sin(t) \sin(2\pi t) \end{aligned}$$

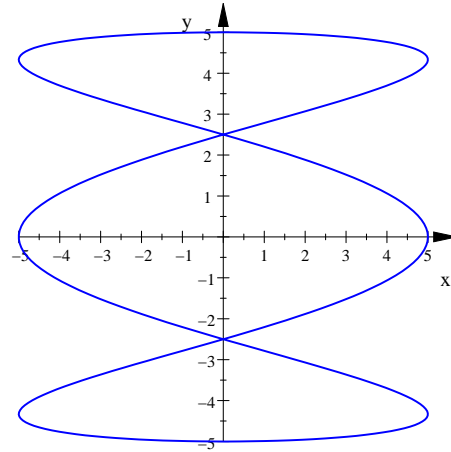


## 2.2 Lissajous-Kurven

### Verhältnis drei zu eins

Bei einer Lissajous-Kurve schwingen Sinus und Kosinus in einem ganzzahligem Verhältnis zueinander, wodurch hier drei Schlingen entstehen.

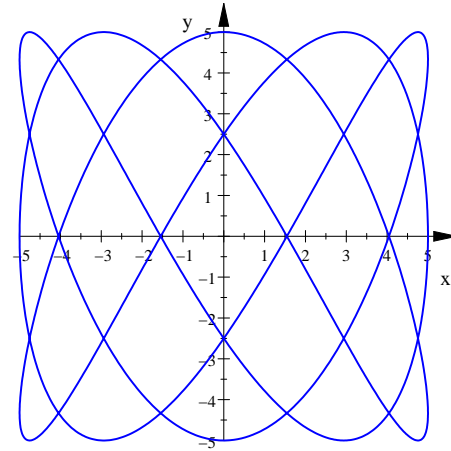
$$\begin{aligned}x(t) &= r \cos(3 \cdot 2\pi t) \\y(t) &= r \sin(1 \cdot 2\pi t)\end{aligned}$$



### Verhältnis drei zu fünf

Ist im Verhältnis weder Zähler noch Nenner gleich eins, so gibt es das gleiche Verhältnis von Schlingen. Hier fünf zu drei.

$$\begin{aligned}x(t) &= r \cos(3 \cdot 2\pi t) \\y(t) &= r \sin(5 \cdot 2\pi t)\end{aligned}$$



### Lissajous-Kurve auf Kugel projiziert

Diese Kurve ist der Versuch, eine Lissajous-Kurve auf die Oberfläche einer Kugel zu projizieren. Die eine Schwingung mit der Drehgeschwindigkeit 17 schwingt von hinten nach vorne. Der Kosinus im Zähler berechnet, wie nahe an den Mittelpunkt dadurch der Radius gerät, während der Sinus im Zähler die Entfernung selbst berechnet. Durch diese Entfernung wird geteilt, damit der räumliche Effekt einer Ein-Punkt-Perspektive entsteht. Der Sinus und Kosinus im Zähler, der die Geschwindigkeit 16 hat, ist eine Schwingung die den Winkel vom Kugelmittelpunkt aus modifiziert.

Von vorne nach hinten zu dem Winkel vom Kugelmittelpunkt gibt es also ein Verhältnis von 17 zu 16, jedoch ist es keine strenge Projektion der Lissajous-Kurve.

$$x(t) = \frac{\cos(17\pi t) \sin(16\pi t)}{\sin(17\pi t) + 15} \quad y(t) = \frac{\cos(17\pi t) \cos(16\pi t)}{\sin(17\pi t) + 15}$$

(Siehe Abbildung 1 auf S. 1.)

## 3 Vektorfunktionen und Elemente der Vektorrechnung

### 3.1 Vektorfunktionen

Eine Parameterdarstellung einer Kurve ist eine Vektorfunktion:

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Vektorfunktionen werden komponentenweise abgeleitet:  $\varphi'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ .

*Definitionen:*

- Eine Vektorfunktion  $\varphi$  ist differenzierbar, falls  $\varphi_x = x(t)$  und  $\varphi_y = y(t)$  differenzierbar sind.
- Eine Vektorfunktion  $\varphi$  heißt *glatt*, falls  $\varphi$  differenzierbar und die erste Ableitung stetig ist. (mit  $I \subseteq \mathbb{R}$ )
- Eine Vektorfunktion  $\varphi$  ist von der Differenzierbarkeitsklasse  $C_k$  : $\leftrightarrow$   $\varphi$  ist k-mal differenzierbar und die k-te Ableitung ist stetig.

*Satz:*

Eine Vektorfunktion  $\varphi$  ist an der Stelle  $t_0$  differenzierbar, wenn  $\lim_{t \rightarrow t_0} \left( \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} \right)$  existiert.

### 3.2 Skalarprodukt von Vektoren und Betrag eines Vektors

Als *Skalarprodukt* zweier Vektoren bezeichnet man die Summe der Produkte der zugehörigen Komponenten:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

Sind beide Vektoren kollinear (d.h. ist einer der Vektoren ein reelles Vielfaches des anderen), wie z.B. bei  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 18 + 8 = 26$ , so ist das Produkt maximal groß. Sind beide Vektoren orthogonal zueinander, wie z.B. bei  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ , ist das Produkt immer 0.

Der *Betrag eines Vektors* lässt sich mithilfe des Satzes des Pythagoras berechnen:

$$|\vec{x}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

### 3.3 Tangenten- und Normaleneinheitsvektor

Ein *Tangenteneinheitsvektor* ist ein Vektor mit dem Betrag Eins entlang einer Tangente an eine Kurve:

$$\vec{t}(t) = \frac{1}{|\varphi'(t)|} \varphi'(t)$$

Der *Normaleneinheitsvektor*  $\vec{n}$  an einer Kurve in einem Punkt  $P$  ist orthogonal zum Tangenteneinheitsvektor an die Kurve in  $P$ , hat ebenfalls den Betrag Eins und ist so gerichtet, dass  $(\vec{t}, \vec{n})$  positiv orientiert ist. Er lässt sich als *Grassmannsche Ergänzung* des zugehörigen Tangenteneinheitsvektors berechnen:

$$\vec{n}(t) = * \vec{t}(t) = \begin{pmatrix} -t_y(t) \\ t_x(t) \end{pmatrix}$$

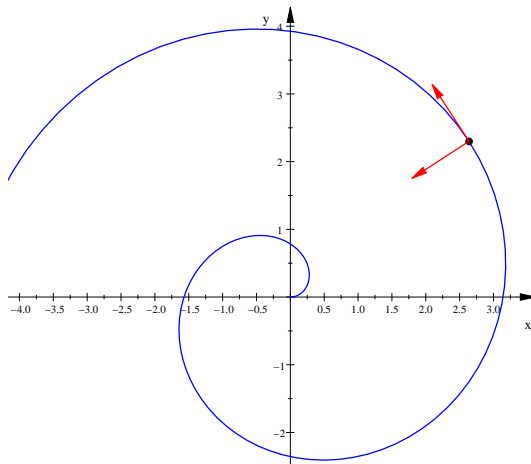


Abbildung 4:  
Tangenten- und Normaleneinheitsvektor in einem Punkt einer Archimedischen Spirale

## 4 Die Bogenlänge

### 4.1 Bogenlänge

Um die Bogenlänge eines Graphen zu berechnen wurde bis jetzt für Funktionen über einem Intervall  $I = [a; b]$  die Gleichung

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

benutzt. Da Kurven durch unterschiedliche Parametrisierungen beschrieben werden können, gibt es eine andere Formel zur Berechnung der Bogenlänge:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

## 4.2 Beispiel am Kreis

Die Formel für die Bogenlänge wird nun an einem selbst gewählten Beispiel getestet, nämlich am Beispiel des Kreises:

$$\text{Gegeben: } t_a = 0 \quad t_b = 1 \quad x(t) = r \cos(2\pi t) \quad y(t) = r \sin(2\pi t)$$

1. Die Teilfunktionen werden in das Integral eingefügt:

$$s = \int_0^1 \sqrt{((r \cos(2\pi t))')^2 + ((r \sin(2\pi t))')^2} dt$$

2. Ableitung der Teilfunktionen:

$$s = \int_0^1 \sqrt{(2\pi r(-\sin(2\pi t)))^2 + (2\pi r \cos(2\pi t))^2} dt$$

3. Da sich die Konstanten durch Quadrieren, Wurzel ziehen und Integrieren nicht verändern, können sie vor das Integral geschrieben werden:

$$s = 2\pi r \int_0^1 \sqrt{(-\sin(2\pi t))^2 + (\cos(2\pi t))^2} dt$$

4. Aus der Addition von  $\cos^2$  und  $\sin^2$  entsteht 1:

$$s = 2\pi r \int_0^1 \sqrt{1} dt$$

5. Das Ergebnis ist  $2\pi r$ , der Kreisumfang, bzw. die Bogenlänge eines Kreises:

$$s = 2\pi r$$

## 4.3 Bogenlänge einer logarithmischen Spirale

Im Folgenden wird ein schwereres Beispiel dargestellt, die logarithmische Spirale. In der Abbildung 5 ist diese Spirale mit den beiden Komponenten  $x(t)$  und  $y(t)$  abgebildet.

$$\begin{aligned} x(t) &= a e^{bt} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t) \\ y(t) &= a e^{bt} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t) \end{aligned}$$

Die Anfangsparameterdarstellung ist folgendermaßen gegeben:

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} a e^{bt} \cos t \\ a e^{bt} \sin t \end{pmatrix}$$

Um die Bogenlänge der Spirale zu berechnen, benötigt man folgende Formel:

$$\int_{t_a}^{t_b} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

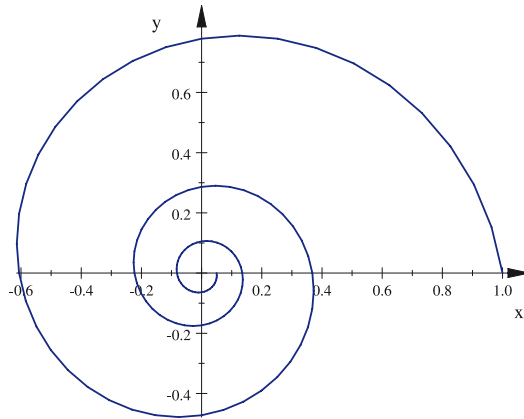


Abbildung 5:  
Logarithmische Spirale

Zunächst werden die Komponenten  $x(t)$  und  $y(t)$  abgeleitet und dann in die Formel eingesetzt:

$$s = \int_0^t \sqrt{a^2 e^{2bt}(b^2 + 1)} dt$$

Durch Umformung und Rechnung entsteht am Ende folgender Term:

$$s = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + 1} (e^{bt} - e^0)$$

Um die Krümmung der logarithmischen Spirale zu ermitteln, wird der oben genannte Term nach der Bogenlänge parametrisiert:

$$t = \frac{1}{b} \ln \left( \frac{b}{a\sqrt{b^2 + 1}} \cdot s + 1 \right)$$

## 5 Krümmung von Kurven

Bisher wurde eine Kurve mittels einer Tangente angenähert. So konnte die Steigung der Kurve in einem Punkt bestimmt werden. Eine wesentlich bessere Annäherung bietet jedoch ein Kreis, anhand dessen auch sogleich die Krümmung bestimmbar ist:

$$k = \frac{1}{r}$$

### 5.1 Krümmung in Abhängigkeit von der Bogenlänge

Die Bestimmung der Krümmung kann anhand der Änderung des Tangenteneinheitsvektors in Abhängigkeit zum zurückgelegten Weg vorgenommen werden. Dies ist möglich, da sich der Tangenteneinheitsvektor bei einer Bewegung des Punktes  $P$  entlang einer Kurve umso stärker ändert, je größer die Krümmung an dieser Stelle ist. Somit gilt:

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \vec{t}' = k \cdot \vec{n} \quad (k \in \mathbb{R}),$$



da die Ableitung des Tangenteneinheitsvektors senkrecht auf selbigem steht und somit gleichgerichtet mit dem Normaleneinheitsvektor ist, der den Betrag 1 hat. Des Weiteren hängt  $\vec{t}'$  von der Krümmung ab. Es ergibt sich für  $k$ :

$$k = \vec{t}' \cdot \vec{n}$$

Da jedoch die Krümmung eine Zahl ist, muss der Betrag gebildet werden:

$$k(s) = |\vec{t}'(s)| = |\varphi''(s)|$$

Es wird nach  $s$  abgeleitet, womit diese Gleichung nur anwendbar ist, wenn die Bogenlänge nach  $s$  parametrisiert werden kann, was nur selten der Fall ist und einen hohen Rechenaufwand mit sich bringt. Ein Beispiel, auf das die obenstehende Gleichung nicht anwendbar ist, ist die Archimedische Spirale, deren Bogenlänge

$$s_{Arch} = a \left( \frac{t_0}{2} \sqrt{1 + t_0^2} + \frac{1}{2} \ln \left( t + \sqrt{1 + t_0^2} \right) \right)$$

nicht nach  $t$  umformbar und somit auch nicht nach  $s$  parametrisierbar ist.

### Beispiel: Krümmung des Kreises

$$x(t) = r \cdot \cos(2\pi t)$$

$$y(t) = r \cdot \sin(2\pi t)$$

$$s = \int_0^{t_0} v(t) dt$$

$$v(t) = \sqrt{(2\pi r \cdot \sin(2\pi t))^2 + (2\pi r \cdot \cos(2\pi t))^2} = 2\pi r$$

$$s(t) = \int_0^{t_0} 2\pi r dt \quad t(s) = \frac{s}{2\pi r}$$

$$x(s) = r \cdot \cos\left(\frac{s}{r}\right) \quad x''(s) = -\cos\left(\frac{s}{r}\right) \cdot \frac{1}{r}$$

$$y(s) = r \cdot \sin\left(\frac{s}{r}\right) \quad y''(s) = -\sin\left(\frac{s}{r}\right) \cdot \frac{1}{r}$$

$$k(s) = \varphi''(s) = \sqrt{\cos^2\left(\frac{s}{r}\right) \cdot \frac{1}{r^2} + \sin^2\left(\frac{s}{r}\right) \cdot \frac{1}{r^2}} = \frac{1}{r}$$

## 5.2 Allgemeinere Krümmungsformel

Über längere Umformungen ist es möglich die bereits bekannte Formel für die Krümmung, die die Parametrisierung nach der Bogenlänge  $s$  nutzt, in eine Formel zu verwandeln, die nur Ableitungen nach  $t$  nutzt, sodass es uns nun auch möglich ist die Krümmung von Kurven zu berechnen, die sich nur schwer oder gar nicht nach  $s$  parametrisieren lassen.

$$k(t) = \frac{x'(t) \cdot y''(t) - x''(t) \cdot y'(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

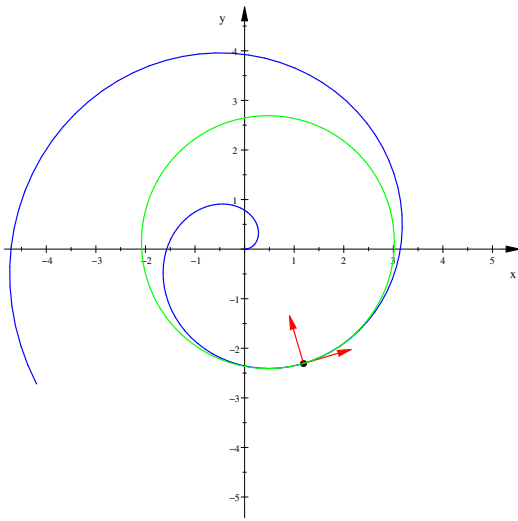


Abbildung 6: Archimedische Spirale mit Krümmungskreis

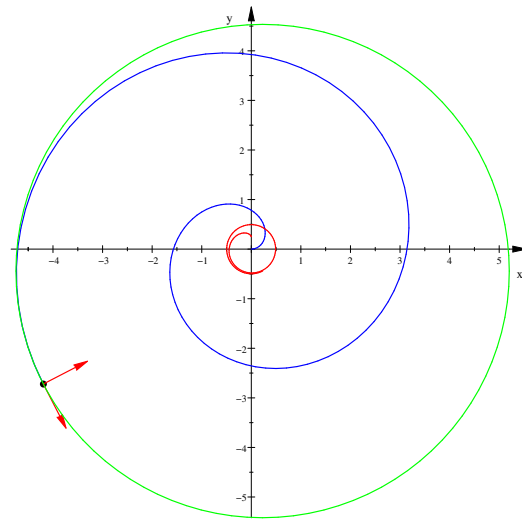


Abbildung 7: Archimedische Spirale mit Krümmungskreis und Evolute

Nun können wir auch die Berechnung der Krümmung der Archimedischen Spirale durchführen, wir erhalten:

$$k_{Arch}(t) = \frac{2 + t^2}{a \cdot \sqrt{1 + t^2}^3}.$$

Eine Berechnung der Krümmungskreise einer Archimedischen Spirale zusammen mit der *Evolute* (Menge der Krümmungskreismittelpunkte einer Kurve) ergibt die in der Abbildung 7 dargestellte Grafik.

Bei einer Ellipse nennt sich die Evolute *Astroide*, siehe Abbildung 8.

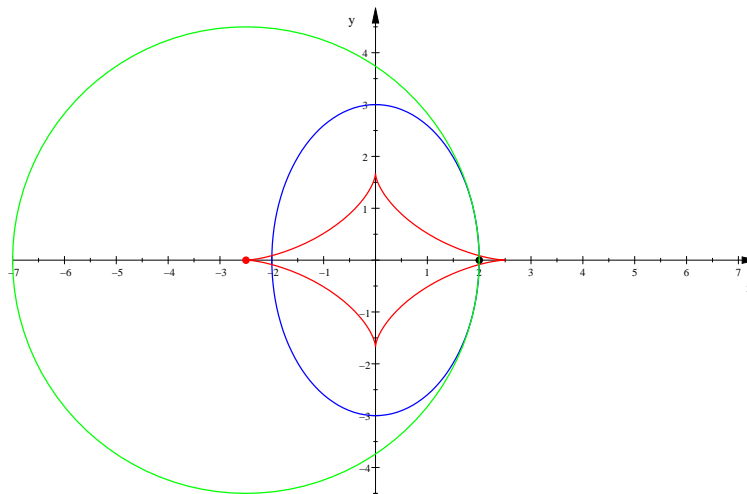


Abbildung 8: Ellipse mit Krümmungskreis und Evolute