

Fraktale

Wechselspiel zwischen Chaos und Ordnung

Teilnehmer:

David Burgschweiger	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin
Tim Gabriel	Herder-Oberschule, Berlin
Welf Garkisch	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin
Anne Kell	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin
Leonard König	Herder-Oberschule, Berlin
Erik Lorenz	Martin-Anderson-Nexö-Gymnasium, Dresden
Sofie Martins	Andreas-Oberschule, Berlin
Niklas Schelten	Herder-Oberschule, Berlin

Gruppenleiter:

Andreas Filler	Humboldt-Universität zu Berlin
----------------	--------------------------------

Wahrscheinlich hat jeder schon einmal von *Mandelbrot* und seinem Apfelmännchen gehört und dieses Gebilde ob seiner Schönheit bewundert. Doch nur die Wenigsten denken dann darüber nach, was die Eigenschaften eines Fraktals an Bedeutung mit sich ziehen. Um alle Kuriositäten, die sich in den selbstähnlichen Gebilden befinden, aufzudecken, haben wir uns eine Woche lang intensiv mit ihnen beschäftigt.

Dabei haben wir als Erstes geklärt, wie man ein Fraktal bilden kann und die Theorie in die Praxis umgesetzt, indem wir u.A. die *Koch-Kurve* in einer Python-Datei programmiert haben. Daraus ergab sich die Frage nach Längen, Flächeninhalten und Volumina von Fraktalen – was uns z.B. zum *Menger-Schwamm* brachte, dessen Oberfläche unendlich groß wird, während sein Volumen gegen 0 strebt. Als Letztes stellte sich uns die schwierige Aufgabe, die Dimension unserer Beispielfraktale zu bestimmen. Dafür gibt es mehrere Verfahren, welche wir erst hergeleitet haben. Schlussendlich hatten wir es mit Kurven zu tun, die sich durch eine einfache Vorschriftsänderung zwischen der ersten und zweiten Dimension „bewegen“.

1 Was ist ein Fraktal?

1.1 Allgemeine Eigenschaften

Um ein Fraktal zu erzeugen, benötigt man zunächst einen *Initiator* und einen *Generator*, die beschreiben, wie das Fraktal gebildet werden soll. Der Initiator ist dabei die Ausgangsfigur und der Generator der Prozess, der von Iterationsschritt zu Iterationsschritt wiederholt wird. Der Generator wird deshalb auch als Iterator bezeichnet.

Das lässt sich gut am Beispiel der Koch-Kurve erklären: Der Initiator ist hier einfach eine Strecke a , der Generator die Dreiteilung dieser sowie das Ersetzen der mittleren Strecke durch ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $\frac{a}{3}$ (siehe Abb. 1-4).

Des Weiteren zeichnen sich Fraktale durch ihre *Selbstähnlichkeit* aus; wenn man in ein Fraktal „hineinzoomt“, so erhält man wieder das Urbild. Demnach kann man sich ein Fraktal als ein selbstähnliches Gebilde vorstellen, das in die Tiefe zu gehen scheint. Weitere Beispiele für Fraktale sind das Sierpinski-Dreieck und der Menger-Schwamm. Auch diese beiden Fraktale lassen sich sehr einfach konstruieren. Ersteres zeichnet sich dadurch aus, dass aus einem Dreieck das Seitenmittendreieck herausgeschnitten wird und das wird mit den so entstandenen drei neuen Dreiecken jeweils wiederholt (s. Abb. 7). Bei der Konstruktion des Menger-Schwamms ist die zugrunde liegende Figur ein Würfel, den man in 27 Teilwürfel zerlegt und die mittleren herausnimmt – und diesen Vorgang wiederholt man mit jedem der übrigen 20 Teilwürfel (s. Abb. 5-6).

Durch die oben genannten Eigenschaften stößt man unweigerlich auf die Frage nach Volumen, Flächeninhalt und Länge von Fraktalen; da z.B. die Koch-Kurve feste Start- und Endpunkte hat (eben die der Ausgangsstrecke a), aber trotzdem bei jedem Iterationsschritt vergrößert wird. Auch die Frage nach der Dimension eines Fraktals hat eine besondere Bedeutung, denn natürlich ist eine Kurve ein-dimensionale – doch was geschieht, wenn sie nach $i \rightarrow \infty$ Iterationsschritten wie ein zweidimensionales Objekt aussieht?

Die Koch-Kurve nach i Iterationsschritten:



Abbildung 1: $i = 0$



Abbildung 2: $i = 1$

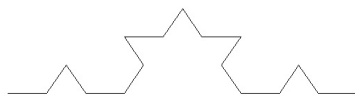


Abbildung 3: $i = 2$

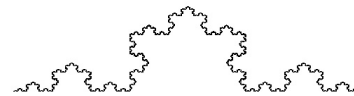


Abbildung 4: $i = 8$

Der Menger-Schwamm nach i Iterationsschritten:

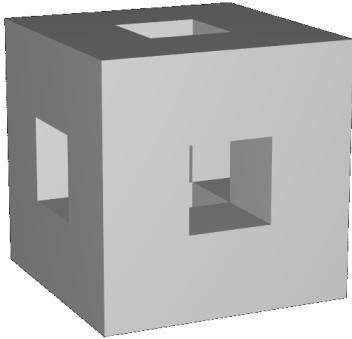


Abbildung 5: $i = 1$

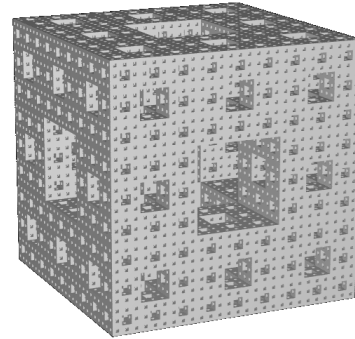


Abbildung 6: $i = 4$

Das Sierpinski-Dreieck nach 8 Iterationsschritten

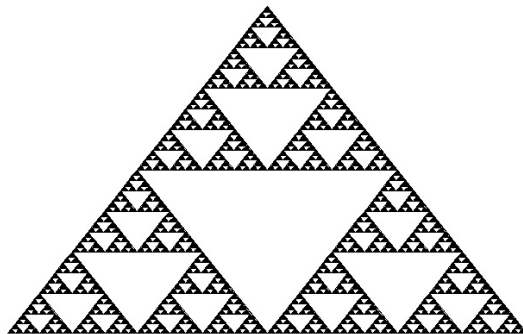


Abbildung 7: $i = 8$

2 Flächen-, Volumen- und Längenbestimmung

2.1 Koch-Kurve

2.1.1 Länge

Die Koch-Kurve hat die Grundlänge a . Bei jedem Iterationsschritt wird die Seite gedrittelt und in der Mitte kommen zwei neue Seiten hinzu. Daher wird die Länge um den Faktor $\frac{4}{3}$ vergrößert. Also gilt:

$$L(i) = a \left(\frac{4}{3} \right)^i.$$

Daraus folgt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} L(i) = \lim_{i \rightarrow \infty} a \left(\frac{4}{3} \right)^i = +\infty.$$

2.1.2 Flächeninhalt

Wir berechnen den Inhalt der Fläche unter der Koch-Kurve. Da die Dreiecke, die entstehen, gleichseitig sind, gilt folgende Formel für deren Flächeninhalte

$$A = g^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Die Grundseite g wird mit jedem Iterationsschritt um den Faktor $\frac{1}{3}$ kleiner. Daher gilt für die Grundseite: $g = \frac{a}{3^i}$. Die Anzahl der Dreiecke, die bei jeder Iteration hinzu kommen, ist 4^{i-1} . Dadurch lässt sich folgende Formel für den Gesamtflächeninhalt angeben:

$$A(i) = \sum_{k=1}^i 4^{k-2} \cdot \frac{a^2}{9^k} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{16} \cdot a^2 \cdot \sum_{k=1}^i \left(\frac{4}{9}\right)^k.$$

Jetzt ist es möglich, den Flächeninhalt für die Koch-Kurve mit unendlich vielen Iterationen zu berechnen:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} A(i) = \frac{\sqrt{3}}{16} a^2 \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} \approx 0,2a^2.$$

2.2 Sierpinski-Dreieck

2.2.1 Flächeninhalt

Pro Iteration wird $\frac{1}{4}$ der vorherigen Fläche entfernt:

$$A(i) = A_0 \left(\frac{3}{4}\right)^i.$$

A_0 sei hierbei Fläche des Ursprungsdreiecks.

Für unendlich viele Iterationen ergibt sich nun die Fläche:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} A_0 \left(\frac{3}{4}\right)^i = 0.$$

2.2.2 Länge

Gesucht ist die Summe der Kantenlängen aller Dreiecke.

Die Länge eines jeden Dreiecks ist $3g$ mit $g = \frac{a}{2^i}$, wobei g die Grundseite des jeweiligen Dreiecks bezeichnet. a sei hierbei die Grundseite des Ursprungsdreiecks. Pro Iteration erhalten wir insgesamt 3^i ausgefüllte Dreiecke und bekommen folgende Gleichung für die Länge heraus:

$$L(i) = 3^{i+1} \frac{a}{2^i}.$$

Dementsprechend ist es möglich das Verhalten für unendlich viele Iterationen zu beschreiben:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} L(i) = \lim_{i \rightarrow \infty} 3^{i+1} \frac{a}{2^i} = +\infty.$$

2.3 Menger-Schwamm

2.3.1 Volumen

Pro Iteration werden 7 von 27 Teilwürfeln entfernt. Für das Volumen folgt daraus:

$$V(i) = \left(\frac{20}{27}\right)^i$$

Wie bei vielen Längen-, Oberflächen- und Volumenberechnungen von Fraktalen ergibt sich eine geometrische Folge, hier mit einem Faktor kleiner 1. Für unendlich viele Iterationen konvergiert das Volumen daher gegen 0:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{20}{27}\right)^i = 0$$

Im Gegensatz dazu, divergiert die Oberfläche des Menger-Schwamms für unendlich viele Iterationen gegen $+\infty$. Somit entsteht ein Gebilde ohne Volumen, aber mit unendlich großer Oberfläche.

3 Dimensionen von Fraktalen

3.1 Selbstähnlichkeitsdimension

Was ist eine Dimension?

Nach allgemeiner Vorstellung sind Strecken ein-, Rechtecke (oder andere Flächen) zwei-, und Würfel dreidimensional. Präzise kann diese Vorstellung mit Selbstähnlichkeit begründet werden:

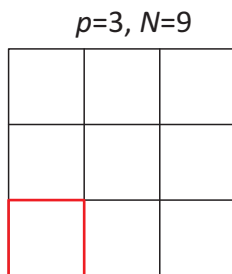


Abbildung 8: Rechteck, $p=3$

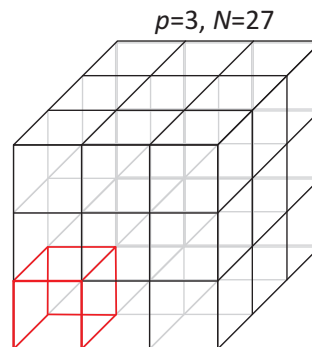





Abbildung 9: Würfel, $p=3$

Bei den Zeichnungen gehen wir von dem Rechteck bzw. Würfel unten links aus und strecken die Seitenlängen um den Faktor $p = 3$. Dadurch entsteht links ein großes Rechteck, welches aus $N = 9$ kleinen Rechtecken besteht und rechts entsteht ein großer Würfel, welcher aus $N = 27$ kleinen Würfeln besteht. Der Zusammenhang zwischen p und N ist jetzt sehr leicht ersichtlich: Hierbei beschreibt d die Dimension, da sie mit unserer obengenannten Vorstellung übereinstimmt.

$$p^d = N \iff d = \frac{\log N}{\log p}.$$

Dadurch haben wir auf sehr einfache Weise einen Dimensionsbegriff für selbstähnliche Objekte definiert. Damit dieser besser verständlich wird, folgen ein paar Beispiele von bekannten Fraktalen:

Sierpinski-Dreieck		$p = 2$	$N = 3$	$d \approx 1.59$
Menger-Schwamm		$p = 3$	$N = 20$	$d \approx 2.73$
Koch-Kurve		$p = 3$	$N = 4$	$d \approx 1.26$

3.2 Yardstick-Dimension

Die „Yardstick-Dimension“ ist eine Dimension, die auch auf nicht selbstähnliche Objekte anwendbar ist.

Um auf diese Weise die Dimension eines Objektes zu bestimmen, werden folgende Schritte durchgeführt:

- die Zollstocklänge (bzw. den Radius) festlegen
- den ersten Zollstock am Ursprung des Objekts anlegen
- den nächsten Zollstock am „letzten“ Schnittpunkt anlegen
- diesen Vorgang bis zum Ende wiederholen
- Anzahl der Kreise erfassen
- r ist der Radius bzw. die Zollstocklänge
- $N(r)$ entspricht der Anzahl der Abtragungen
- $L(r)$ ist die Gesamtlänge
- c ist eine Konstante und
- a eine Variable, für die $a = 1 - d$ gilt.

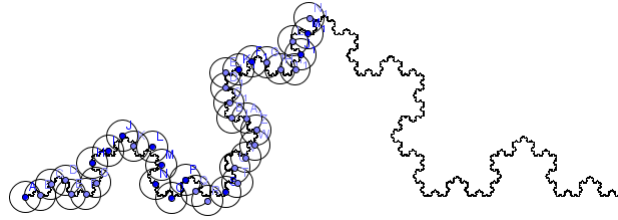


Abbildung 10: Beispiel der Yardstick-Methode a.d. Koch-Kurve

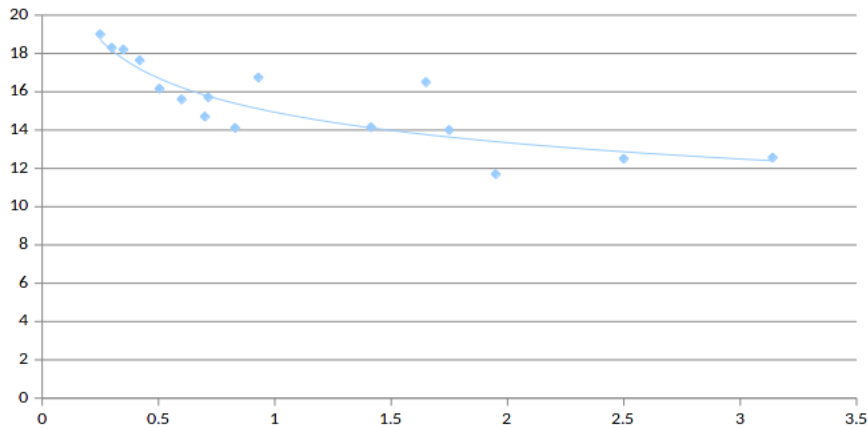


Abbildung 11: L in Abhängigkeit von r bei der Koch-Kurve

Nach genügend vielen Messwerten liegt bei einer Darstellung der Gesamtlänge in Abhängigkeit des Radius die Annäherung durch eine Potenzfunktion nahe, deren Normalform $L(r) = c \cdot r^a$ lautet.

Nach Umformungen entsteht folgende Formel für die Dimension einer Kurve:

$$d = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(N(r))}{\log(\frac{1}{r})}$$

Ein bekanntes Beispiel für die Verwendung des Verfahrens ist die britische Küste, da sie sehr zerklüftet ist. Die Dimension, die sich dann ergibt, beträgt 1.23.

Für die Koch-Kurve ergibt sich: $N(r_n) = 4^n$. Setzt man dies ein, so kann man für die Dimension der Koch-Kurve folgende Formel aufstellen:

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(4^n)}{\log(\frac{3^n}{a})}$$

Durch diese Messung haben wir einen Wert für a und dementsprechend auch die Dimension d :

$$a \approx -0.16 \text{ und } d \approx 1.16.$$

4 Zufallsfraktale

4.1 Was sind Zufallsfraktale?

Ein Zufallsfraktal ist eine unendliche Folge von nach einer gewissen Vorschrift zufällig ausgewählten Punkten, die sich insgesamt einem Fraktal beliebig gut annähern.

4.2 Sierpinski-Dreieck und Zufallsfraktale

Wir wählen einen beliebigen Startpunkt. Der nächste Punkt ist der Mittelpunkt zwischen dem aktuellen Punkt und einem der drei Eckpunkte des gegebenen Dreiecks. Der Eckpunkt wird zufällig ausgewählt. Bei den folgenden Bildern sind die Wahrscheinlichkeiten für alle drei Funktionen gleich groß:

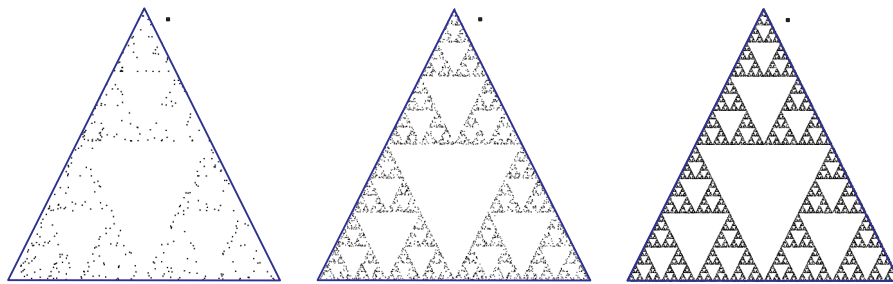


Abbildung 12: nach 400, 4000 und 40000 Iterationsschritten

4.2.1 Beweis

Wir stellen das Sierpinski-Dreieck in einem affinen Koordinatensystem dar.

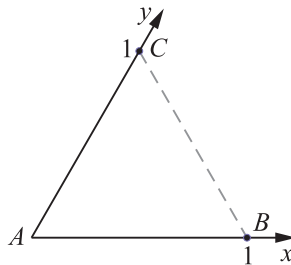


Abbildung 13: ein affines Koordinatensystem

Punkte des Ausgangsdreiecks sind:

$$P(x|y) \text{ mit } 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; x + y \leq 1.$$

Dieses affine Koordinatensystem hat den Ursprungspunkt A und die Basisvektoren \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{AC} , d.h. $KS = \{A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$.

Zur Vereinfachung stellen wir nun alle Koordinaten im Dualsystem dar:

$$\begin{aligned} x &= 0, x_1x_2x_3 \dots & x_i, y_i &\in \{0; 1\} \\ y &= 0, y_1y_2y_3 \dots \end{aligned}$$

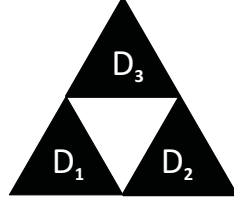


Abbildung 14: Sierpinski-Dreieck nach der ersten Iteration

Betrachten wir nun S_1 , also die erste Iteration des Sierpinski-Dreiecks, dann können wir die drei entstehenden Dreiecke wie folgt darstellen:¹

$$D_1 = \{(x|y) \mid 0 \leq x \leq 0, 1^*, 0 \leq y \leq 0, 1^*, x + y \leq 1\}.$$

Eine für diesen Beweis besser geeignete Darstellung ist:

$$D_1 = \left\{ (x|y) \mid \begin{array}{l} x = 0, 0x_2x_3 \dots \\ y = 0, 0y_2y_3 \dots \end{array} \quad y \leq 0, 0\hat{x}_2\hat{x}_3 \dots \text{ mit } \hat{x}_i = \begin{cases} 0 & \text{falls } x_i = 1 \dots \\ 1 & \text{falls } x_i = 0 \dots \end{cases} \right\}$$

$$D_2 = \left\{ (x|y) \mid \begin{array}{l} x = 0, 1x_2x_3 \dots \\ y = 0, 0y_2y_3 \dots \end{array} \quad y \leq 0, 0\hat{x}_2\hat{x}_3 \dots \text{ mit } \hat{x}_i = \begin{cases} 0 & \text{falls } x_i = 1 \dots \\ 1 & \text{falls } x_i = 0 \dots \end{cases} \right\}$$

$$D_3 = \left\{ (x|y) \mid \begin{array}{l} x = 0, 0x_2x_3 \dots \\ y = 0, 1y_2y_3 \dots \end{array} \quad y \leq 0, 0\hat{x}_2\hat{x}_3 \dots \text{ mit } \hat{x}_i = \begin{cases} 0 & \text{falls } x_i = 1 \dots \\ 1 & \text{falls } x_i = 0 \dots \end{cases} \right\}$$

Diese Darstellung ist korrekt, weil $0.\overline{1}^* = 1$ gilt. Nach Definition gilt:

$$\begin{aligned} S_2 &= D_1 \cup D_2 \cup D_3 = \\ &= \left\{ (x|y) \mid \begin{array}{l} x = 0, x_1x_2x_3 \dots \\ y = 0, y_1y_2y_3 \dots \end{array} \quad \text{mit } (x_1|y_1) \neq (1|1) \text{ und } y \leq 0, 0\hat{x}_2\hat{x}_3 \dots \right\}. \end{aligned}$$

Analog für beliebige S_∞ :

$$S_\infty = \left\{ (x|y) \mid \begin{array}{l} x = 0, x_1x_2x_3 \dots \\ y = 0, y_1y_2y_3 \dots \end{array} \quad \text{mit } (x_i|y_i) \neq (1|1) \right\}.$$

Anschaulich dargestellt kann man sich jede Nachkommastelle als eine Verschiebung vorstellen, wobei unsere Zusatzbedingungen sicherstellen, dass unsere Vorschrift das Sierpinski-Dreieck genau beschreibt.

¹Die Darstellung erfolgt in Dualzahlen, was hier durch * gekennzeichnet ist.

4.3 Beliebiger kleiner Abstand zwischen Punkten des Sierpinski-Dreiecks und des Zufallsfraktals

Ein Punkt P des Zufallsfraktals wird sich in jedem Fall irgendwann in dem Dreieck befinden und dann nicht mehr aus dem Dreieck heraus springen. Im affinen Koordinatensystem befinden sich seine Koordinaten zwischen 0 und 1. Durch jeden weiteren Schritt rutschen die vorhandenen Nachkommaziffern um eine Stelle nach rechts:

$$\begin{aligned}x &= 0, x_1 x_2 x_3 \dots & y &= 0, y_1 y_2 y_3 \dots \\ \Rightarrow x &= 0, 0 x_1 x_2 \dots & y &= 0, 0 y_1 y_2 \dots\end{aligned}$$

Die frei werdende Stelle wird durch eines der Zahlenpaare $(0|0)$, $(1|0)$, $(0|1)$ eingenommen (in diesem Beispiel durch das Zahlenpaar $(0|0)$). Das ergibt sich aus der Bildungsformel für den Punkt:

$$x_{k+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}x_k \\ \frac{1}{2}x_k + \frac{1}{2} \end{cases} \quad y_{k+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}y_k \\ \frac{1}{2}y_k + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Da keines der eingefügten Zahlenpaare $(1|1)$ ist, erfüllt jedes dieser Paare die Zusatzbedingung der vorherigen Darstellung des Sierpinski-Dreiecks. Pro Schritt entspricht eine Nachkommastelle mehr den Koordinaten des Sierpinski-Dreiecks, also ist der Abstand zwischen einem Punkt des Zufallsfraktals nach n Durchführungen und einem Punkt des Sierpinski-Dreiecks maximal $\frac{1}{2^{-(n+1)}}$. Die Punkte nähern sich so beliebig gut an.