Zufällige Wetten: Vom Glücksspiel zum modernen Risikomanagement

Teilnehmer:

Lukas Thum	Herder-Oberschule
Yu Wang	Herder-Oberschule
Luciana Plocki	Herder-Oberschule
Johanna Ridder	Herder-Oberschule
Felix Tschierschke	Herder-Oberschule
Thu Hien Nguyen	Heinrich-Hertz-Oberschule
Janin Rekittke	Andreas-Oberschule
Johanna Lindberg	Andreas-Oberschule

Gruppenleiter:

Stefan Ankirchner	Humboldt-Universität zu Berlin, Mitglied im DFG-Forschungszentrum Matheon „Mathematik für Schlüsseltechnologien“

Normalerweise stellt man sich unter „Wetten“ etwas Riskantes vor. In dem Projekt haben wir gesehen, dass man durch Wetten auf bestimmte Ereignisse Risiken auch reduzieren kann.

Zunächst haben wir einige riskante Wetten mathematisch untersucht. Unter anderem haben wir das Roulette-Spiel im Casino studiert und dabei z.B. die beste Strategie ermittelt, seinen Einsatz zu verdoppeln, bevor man ihn ganz verspielt hat.

Risikoverringernde Wettstrategien werden unter anderem verwendet, um sogenannte Finanzderivate abzusichern. Wir erklären, wie man solche Papiere bewertet und wie Banken durch geschickte Wettstrategien das Risiko solcher Papiere managen.

Inhaltsverzeichnis

1 Glücksspiel

1.1 Das Spieler-Ruin-Problem

Zwei Spieler treten gegeneinander an. Ihr Einsatz beträgt zusammengenommen $a > 0$. Ein Spieler hat den Einsatz i, wobei gilt: $a - i > 0$. Der Spieler setzt 1 \$. Die Wahrscheinlichkeit, 1 \$ zu gewinnen, beträgt p und diejenige, 1 \$ zu verlieren, $q = 1 - p$. Das Spiel wird gespielt, bis ein Spieler das gesamte Geld a beider Spieler gewinnt oder alles verliert.
Es gibt drei Möglichkeiten:

(1) Gegenspieler gewinnt;
(2) Spieler gewinnt;
(3) niemand gewinnt.

Wir betrachten Fall 1, wobei der Spieler verliert. Um diese Wahrscheinlichkeit zu berechnen, ist folgende Aussage zu betrachten:
{Der Spieler ist ruiniert, wenn er mit i \$ startet und den Einsatz i verliert} $=$ { Der Spieler gewinnt 1\$ und ist ruiniert mit $(i + 1)$ \$ } $\cup$ {Der Spieler verliert 1\$ und ist ruiniert mit $(i - 1)$\$ }
Diese Aussage lässt sich als folgende Gleichung darstellen:

$$q_i = pq_{i+1} + qq_{i-1}$$

Durch mehrere Umformungsschritte gelangt man zu der Gleichung:

$$q_i - q_1 = (\frac{q}{p} + (\frac{q}{p})^2 + ... + (\frac{q}{p})^{i-1})(q_1 - 1) \tag{1}$$

Falls $p \neq \frac{1}{2}$, lässt sich mit Hilfe der geometrischen Reihe (1) wie folgt darstellen:

$$q_i - q_1 = \frac{(\frac{q}{p}) - (\frac{q}{p})^i}{1 - (\frac{q}{p})}(q_1 - 1) \tag{2}$$

Hieraus folgt

$$p_i = \frac{(\frac{p}{q})^{a-i} - (\frac{p}{q})^a}{1 - (\frac{p}{q})^a} \qquad \text{oder} \qquad q_i = \frac{(\frac{q}{p})^i - (\frac{q}{p})^a}{1 - (\frac{q}{p})^a}. \tag{3}$$

Wenn $p = q = \frac{1}{2}$ gilt, ist (2) nicht lösbar, da der Nenner 0 wird. In diesem Fall hat man

$$q_i - q_1 = (i-1)(q_1 - 1). \tag{4}$$

Falls man in (4) $i = a$ setzt, bekommt man $q_1 = 1 - \frac{1}{a}$. Kombiniert man dies mit (4), dann ergibt sich

$$p_i = 1 - \frac{a-i}{a} \qquad \text{oder} \qquad q_i = 1 - \frac{i}{a} \tag{5}$$

Bei diesen Gleichungen gilt, dass die Einsatzhöhe 1$ beträgt. Doch wie verändert sich die Gewinnchance, wenn man die Einsatzhöhe verändert? Da bei den Formeln (3) und (5) die Schrittgröße 1 beträgt, muss umgerechnet werden, z.B. 2$=1 Chip.

1.2 Gewinnchancen in Abhängigkeit von der Einsatzhöhe

Beispiel: Bei einem amerikanischen Roulettespiel beträgt das Kapital 100$. Die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen beträgt p=$\frac{18}{38}$ und diejenige zu verlieren q=$\frac{20}{38}$, wenn der Spieler durchgehend auf eine Farbe setzt.

Wir betrachten die unterschiedlichen Schrittgrößen:

(1) Einsatzhöhe 2$
(nach Formel (3))
$\rightarrow i = 50\ Chips, a = 100\ Chips$
$\Rightarrow p_i \approx 0,0513\%$

(2) Einsatzhöhe 100 $
$\rightarrow i = 1\ Chip, a = 2\ Chips$
$\Rightarrow p_i \approx 47\%$

Behauptung: Je größer die Einsatzhöhe ist, umso größer ist die Gewinnwahrscheinlichkeit.

Beweis: Ein Spieler gewinnt, wenn er sein Kapital verdoppelt hat, d.h. $a = 2i$ (a sei das gewünschte Endkapital). In diesem Fall erhält man:

$$p_i = \frac{(\frac{p}{q})^i - (\frac{p}{q})^{2i}}{1 - (\frac{p}{q})^i} = \frac{(\frac{p}{q})^i[1 - (\frac{p}{q})^i]}{1 - (\frac{p}{q})^i} = (\frac{p}{q})^i$$

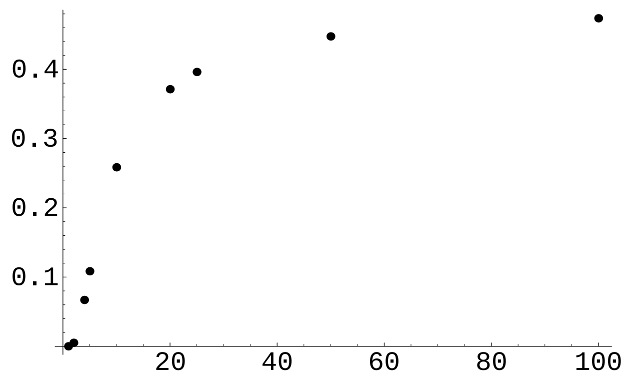
(nach Formel(3))

$\frac{p}{q}$ wird potenziert. Da $p < q$, fällt p_i mit wachsendem i.

Ausnahme: Bei $p = q = \frac{1}{2}$ spielt die Einsatzhöhe keine Rolle:

$p_i = 1 - \frac{2i-i}{2i} = \frac{1}{2}$ (nach Formel (5)).

Die folgende Graphik zeigt die Gewinnwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Einsatzhöhe bei einem Roulettespiel an.



2 Modernes Risikomanagement

2.1 Hedging

Definition: Absicherung gegen Risiko durch Anwendung einer Finanzstrategie

Wir erläutern den Begriff durch folgendes Beispiel:

Beispiel: Media Markt bietet für die EM 2008 seinen Kunden ein spezielles Angebot: Sollte Deutschland die EM gewinnen, so erstattet Media Markt den Kaufpreis für jeden Fernseher, der im Rahmen der Aktion verkauft wurde.

Annahmen:

1. Der Einkaufspreis beträgt 900€.
2. In einem Wettbüro erhält man für 1 € im Falle eines Sieges des deutschen Teams 5 €.

Frage: Wieviel muss Media Markt mindestens für einen Fernseher verlangen, um ohne Risiko und ohne Verlust dieses Angebot unterbreiten zu können, wenn man annimmt, dass Media Markt jeden zusätzlichen Euro verwettet?

Lösung:
x sei der gesuchte Verkaufspreis. Es muss gelten:

$$\begin{aligned} (x-900)*5 &= x \\ \Rightarrow 5x-4500 &= x \\ \Rightarrow 4x &= 4500 \\ \Rightarrow x &= 1125 \end{aligned}$$

Also muss der Verkaufspreis eines Fernsehers mindestens 1125 € betragen.

2.2 Derivate

Eingesetzt werden Derivate im Bank- und Börsenwesen. Typisch für diese ist, dass die im Vertrag vorbestimmten Transaktionen nicht direkt nach Vertragsschluss, sondern erst nach einem im Vertrag festgelegten Zeitintervall vollzogen werden. Außerdem sind Transaktionen von zufälligen Größen, wie z.B. Aktienpreisen (Finanzderivate) oder Wetterfaktoren (Wetterderivate) abhängig. Oft sind Derivate von folgender Gestalt:

$$\begin{aligned} European\ Put\ Option &= max(0; K-S_n) = (K-S_n)^+ \\ European\ Call\ Option &= max(0; S_n-K) = (S_n-K)^+ \\ Swap &= (S_n-K) \end{aligned}$$

wobei K eine Konstante ist, der sogenannte Strike (vertragliche Vereinbarung) und S_n die zufällige Größe, das sogenannte Underlying.

2.3 Wann ist perfektes Hedgen mit Wetterderivaten möglich?

Wetterderivate basieren meistens auf 'heating degree days' (HDD) HDD= max(0;18)-Tagesdurchschnittstemperautur)
'Cumulative heating degree days' sind dann:

$$cHDD = \sum_{i=1}^{31} HDD_i$$

Rechenbeispiel: Ein Gasunternehmen hat Einnahmen in Abhängigkeit von der Temperatur des Winters:

$$X = 10 * cHDD + 10000$$

X: Einnahmen des Gasunternehmens
18° sei die Temperatur, bei der man beginnt zu heizen.

cHDD ist eine Zufallsvariable.

Die Ausschüttung (Pay-off) des Derivates D sei bestimmt durch:

$$D = max(0; 4500 - cHDD) = (4500 - cHDD)^+$$

Der Preis für die Derivate betrage C.

Frage: Ist es möglich eine bestimmte Anzahl an Derivaten zu kaufen, damit das Unternehmen mit gleichmäßigen Einnahmen rechnen kann? Wieviele müsste es dann kaufen?

Im folgenden unterscheiden wir 2 Fälle:

1. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass es für die cHDDs nur 2 Möglichkeiten gibt. Entweder betragen sie im kalten Winter 6000 € und im Falle eines warmen Winters nur 3000 €. Dabei ist die Wahrscheinlichkeit für einen warmen Winter p und die für einen kalten Winter $q = 1 - p$, d.h. es gilt:

$$cHDD = \begin{cases} 6000, & \text{mit Wahrscheinlichkeit q} \\ 3000, & \text{mit Wahrscheinlichkeit p} \end{cases}$$

   Lösung:
   Wir bezeichnen mit X_k die Einnahmen im kalten Winter und mit X_w die Einnahmen im warmen Winter. Zudem ist n die Anzahl der zu kaufenden Derivate. Dann gilt:

$$X_k = 10 * 6000 + 10000 + n * max(0; -1500) - (n * C) = 70000 - (n * C)$$

$$X_w = 10*3000+10000+n*max(0; 1500)-(n*C) = 40000+1500n-(n*C)$$

   Es muss gelten:

$$X_k = X_w$$

$$70000 - (n * C) = 40000 + 1500n - (n * C)$$

$$30000 = 1500n$$

$$n = 20$$

   Fazit: Das Unternehmen muss 20 Derivate kaufen, um konstante Einnahmen, unabhängig vom Winter, zu gewährleisten.

2. Nun betrachten wir 3 Möglichkeiten für die Durchschnittstemperatur des Winters. Wie im ersten Fall beträgt das cHDD bei einem kalten Winter 6000 €. Allerdings betrachten wir nun auch die Möglichkeit eines neutralen Winters. In diesem Fall beträgt das cHDD 4000 € und bei einem warmen Winter 3000 €.

$$cHDD = \begin{cases} 6000, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1/3 \\ 4000, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1/3 \\ 3000, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1/3 \end{cases}$$

Nun werden wir beweisen, dass es in diesem Fall nicht möglich ist, die Einnahmen des Gasunternehmens wetterunabhängig zu machen.

Lösung:
Wir bezeichnen mit X_n die Einnahmen im neutralen Winter.Es gilt wieder der Ansatz:

$$X_k = X_w = X_n$$
$$X_k = 10 * 6000 + 10000 + n * max(0; -1500) - (n * C) = 70000 - (n * C)$$
$$X_n = 10 * 4000 + 10000 + n * max(0; 500) - (n * C) = 50000 + 500n - (n * C)$$
$$X_w = 10 * 3000 + 10000 + n * max(0; 1500) - (n * C) = 40000 + 1500n - (n * C)$$

$$X_k = X_n$$
$$70000 - (n * C) = 50000 + 500n - (n * C)$$
$$n = 40$$

$$X_k = X_w$$
$$70000 - (n * C) = 40000 + 1500n - (n * C)$$
$$n = 20$$

$$X_n = X_w$$
$$50000 + 500n - (n * C) = 40000 + 1500n - (n * C)$$
$$n = 10$$

Fazit: Aufgrund der widersprüchlichen Ergebnisse kann man schlussfolgern, dass es für das Unternehmen nicht möglich ist, eine bestimmte Anzahl an Derivaten zu kaufen, um konstante Einnahmen zu gewährleisten.

3 Δ-Hedging

Banken betreiben eine Risikoabsicherung von Finanz-Derivaten mit Hilfe des sogenannten Δ-Hedging. Sie verkaufen Derivate, deren Ausschüttung von dem Wert einer Aktie zu einem bestimmten Zeitpunkt in der Zukunft abhängt. Wir zeigen jetzt wie Banken den Minimalpreis bestimmen, den sie für die Derivate verlangen müssen. Die Bank möchte dabei unabhängig von der Entwicklung des Aktienkurses keinen Verlust machen. Den Kurs einer Aktie simulieren wir durch Münzwürfe: Bei Kopf (H:head) steigt der Kurs um den up-factor u und bei Zahl (T:tail) sinkt der Kurs um den down-factor d. Außerdem gibt es ein Bankkonto mit einem festen Zinssatz r.
Die Wahrscheinlichkeit, mit der der Aktienkurs steigt oder fällt, spielt keine Rolle. Wir verlangen nur, dass sie beide positiv sind. Die später eingeführten Hilfswahrscheinlichkeiten $\tilde{p}$ und $\tilde{q}$ entsprechen nicht den Aktienkurs beeinflussenden Wahrscheinlichkeiten.
Im folgenden werden wir durch ein Baumdiagramm die möglichen Kursentwicklungen einer Aktie darstellen.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & S_3(HHH) = u^3 S_0 \\
 & & S_2(HH) = u^2 S_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & S_1(H) = uS_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_3(HHT) = S_3(HTH) = S_3(THH) = u^2 d S_0 \\
S_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2(HT) = S_2(TH) = udS_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & S_1(T) = dS_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_3(HTT) = S_3(THT) = S_3(TTH) = ud^2 S_0 \\
 & & S_2(TT) = d^2 S_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & & S_3(TTT) = d^3 S_0
\end{tikzcd}
$$

- S = Wert der Aktie
- X = Vermögen
- Δ = Anteil der gekauften Aktien
- r = Zinssatz
- d = down-factor
- u = up-factor
- V = fairer Wert des Derivats
- D = call-Option (z.B. $V_N = (S_N - K)^+$)
- $\tilde{p}$ & $\tilde{q}$ = risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten, wobei $\tilde{q} = 1 - \tilde{p}$

Der Wert unseres Gesamtvermögens im Portfolio ist rekursiv nach folgender Gleichung definiert, beginnend mit X_0:

$$X_{n+1} = \Delta_n S_{n+1} + (1+r)(X_n - \Delta_n S_n). \tag{6}$$

Theorem: (Replikation im mehrperiodischen Binomialmodell)

Wir gehen von einem Preismodell über N Perioden aus, mit $0 < d < 1 + r < u$ und mit

$$\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d}, \quad \tilde{q} = \frac{u-1-r}{u-d}.$$

V_N sei eine beliebige Variable (die Ausschüttung des Derivats zur Zeit N), die von den ersten N Münzwürfen $\omega_1\omega_2...\omega_N$ abhängt. Die Variablen $V_{N-1}, V_{N-2}, ..., V_0$ werden rekursiv von ihren Nachfolgern definiert:

$$V_n(\omega_1\omega_2...\omega_n) = \frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_{n+1}(\omega_1\omega_2...\omega_n H) + \tilde{q}V_{n+1}(\omega_1\omega_2...\omega_n T)], \tag{7}$$

sodass jedes V_n von den ersten n Münzwürfen $\omega_1\omega_2...\omega_n$ abhängt, wobei n zwischen $N-1$ und 0 liegt. Als nächstes definieren wir:

$$\Delta_n(\omega_1\omega_2...\omega_N) = \frac{V_{n+1}(\omega_1\omega_2...\omega_n H) - V_{n+1}(\omega_1\omega_2...\omega_N T)}{S_{n+1}(\omega_1\omega_2...\omega_n H) - S_{n+1}(\omega_1\omega_2...\omega_N T)}, \tag{8}$$

wobei n wieder zwischen 0 und $N-1$ liegt. Wenn wir $X_0 = V_0$ setzen und $X_1, X_2, ..., X_N$(die Werte des Portfolios, also des Gesamtvermögens) rekursiv wie in (6) durch die Vorgänger definieren, haben wir:

$$X_N(\omega_1\omega_2...\omega_N) = V_N(\omega_1\omega_2...\omega_n) \tag{9}$$

für alle $\omega_1\omega_2...\omega_N$.

Bemerkung: Für $n = 1, 2, ..., N$ ist die zufällige Variable $V_n(\omega_1...\omega_n)$ der faire Preis des Derivats zur Zeit n, wenn die ersten n Ergebnisse der Münzwürfe $\omega_1\omega_2...\omega_n$ sind. Der Preis des Derivats zur Zeit 0 ist definiert als V_0.

Beweis des Theorems: Wir beweisen durch vollständige Induktion, dass folgendes gilt:

$$X_n(\omega_1\omega_2...\omega_n) = V_n(\omega_1\omega_2...\omega_n) \tag{10}$$

für alle $\omega_1\omega_2...\omega_n$,

wobei n zwischen 0 und N liegt. Der Fall $n = 0$ ist durch die Definition von X_0 als V_0 gegeben. Den Fall $n = N$ wollen wir nun zeigen. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass die Gleichung (10) für einen Wert von n kleiner als N gilt und zeigen, dass sie auch für $n+1$ gültig ist. $\omega_1\omega_2...\omega_n\omega_{n+1}$ seien fest aber beliebig und die Induktionsbehauptung von (10) gelte für diese festen $\omega_1\omega_2...\omega_n$. Wir wissen nicht, ob $\omega_{n+1} = H$ oder $\omega_{n+1} = T$, daher betrachten wir beide Fälle getrennt. Zunächst wenden wir (6) auf $X_{n+1}(\omega_1\omega_2...\omega_n T)$ an:

$$\begin{aligned}
&X_{n+1}(\omega_1\omega_2...\omega_n T)\\
&= \Delta_n(\omega_1\omega_2...\omega_n) d S_n(\omega_1\omega_2...\omega_n)\\
&\quad +(1+r)(X_n(\omega_1\omega_2...\omega_n) - \Delta_n(\omega_1\omega_2...\omega_n)S_n(\omega_1\omega_2...\omega_n)).
\end{aligned}$$

Um die Schreibweise zu vereinfachen lassen wir $\omega_1\omega_2...\omega_n$ und schreiben die Gleichung einfach als:

$$X_{n+1}(T) = \Delta_n d S_n + (1+r)(X_n - \Delta_n S_n). \tag{11}$$

Aus (8) haben wir folgende Gleichung, bei der wir ebenfalls $\omega_1\omega_2...\omega_n$ weglassen:

$$\Delta_n = \frac{V_{n+1}(H) - V_{n+1}(T)}{S_{n+1}(H) - S_{n+1}(T)} = \frac{V_{n+1}(H) - V_{n+1}(T)}{uS_n - dS_n} = \frac{V_{n+1}(H) - V_{n+1}(T)}{(u-d)S_n}.$$

Wir substituieren in (11) und benutzen die Induktionsbehauptung (10) und die Definition (7) von V_n; dann erhalten wir:

$$\begin{aligned}
X_{n+1}(T) &= (1+r)X_n + \Delta_n S_n(d-(1+r))\\
&= (1+r)V_n + \frac{(d-(1+r))(V_{n+1}(H) - V_{n+1}(T))}{u-d}\\
&= (1+r)V_n - \tilde{p}V_{n+1}(H) + \tilde{p}V_{n+1}(T)\\
&= \tilde{p}V_{n+1}(H) + \tilde{q}V_{n+1}(T) - \tilde{p}V_{n+1}(H) + \tilde{p}V_{n+1}(T)\\
&= V_{n+1}(T).
\end{aligned}$$

Wir fügen die weggelassenen $\omega_1\omega_2...\omega_n$ wieder ein und erhalten somit:

$$X_{n+1}(\omega_1\omega_2...\omega_n T) = V_{n+1}(\omega_1\omega_2...\omega_n T).$$

Ein analoges Argument führt darauf, dass

$$X_{n+1}(\omega_1\omega_2...\omega_n H) = V_{n+1}(\omega_1\omega_2...\omega_n H).$$

Folglich gilt in beiden Fällen (sowohl $\omega_{n+1} = H$ als auch $\omega_{n+1} = T$), dass

$$X_{n+1}(\omega_1\omega_2...\omega_n\omega_{n+1}) = V_{n+1}(\omega_1\omega_2...\omega_n\omega_{n+1}).$$

Da $\omega_1\omega_2...\omega_n\omega_{n+1}$ beliebig ist, ist der Induktionsschritt vollständig.

Fazit: Somit haben wir bewiesen, dass

$$X_n(\omega_1\omega_2...\omega_n) = V_n(\omega_1\omega_2...\omega_n)$$

für alle $\omega_1\omega_2...\omega_n$ gilt.