Darstellungsformen von Zahlen

Teilnehmer:

Lukas Deubel	Immanuel-Kant-Oberschule, Berlin
Christoph Gehrke	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin
Leon Ochmann	Herder-Oberschule, Berlin
Anastasia Prokudina	Käthe-Kollwitz-Oberschule, Berlin
Matthias Salz	Käthe-Kollwitz-Oberschule, Berlin
Maximilian Schade	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin

Gruppenleiter:

Jürg Kramer	Humboldt-Universität zu Berlin Mitglied im DFG-Forschungszentrum MATHEON „Mathematik für Schlüsseltechnologien“
Anna v. Pippich	Humboldt-Universität zu Berlin Mitglied im DFG-Forschungszentrum MATHEON „Mathematik für Schlüsseltechnologien“
Giovanni De Gaetano	Humboldt-Universität zu Berlin

Seitdem Menschen zählen, sind die unterschiedlichsten Zahlsysteme zur Darstellung von Zahlen entstanden. Die uns heute vertraute Darstellung ist die Dezimaldarstellung. In unserem Alltag begegnen uns jedoch auch andere Darstellungen, wie beispielsweise die Binärdarstellung in unseren Rechnern, d.h. die Darstellung einer Zahl zur Basis 2. Neben den vielen Vorteilen der Dezimaldarstellung hat diese auch Nachteile. Zum Beispiel können rationale Zahlen sowohl abbrechende als auch periodische Dezimalbruchentwicklungen besitzen. Außerdem gibt es Darstellungsformen, die irrationale Zahlen wesentlich effektiver approximieren als die Dezimaldarstellung.
Die sogenannten Kettenbrüche liefern eine Darstellungsform reeller Zahlen, mit der die oben genannten Nachteile des Dezimalsystems behoben werden. Wir werden beweisen, dass die rationalen Zahlen genau durch die abbrechenden Kettenbrüche charakterisiert werden. Desweiteren werden wir sehen, dass irrationale Zahlen durch Kettenbrüche optimal approximiert werden.
Interessant ist jetzt die Frage nach den irrationalen Zahlen, welche durch periodische Kettenbrüche dargestellt werden. Das einfachste Beispiel ist der Kettenbruch $[1; 1, 1, 1, \ldots]$; es zeigt sich, dass dieser Kettenbruch die quadra-

tische Irrationalität $\omega = (1+\sqrt{5})/2$ darstellt. Allgemeiner werden wir zeigen, dass die periodischen Kettenbrüche genau den Lösungen quadratischer Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten entsprechen. Schließlich wollen wir die sogenannte Farey-Benachbartschaft und sogenannte Farey-Folgen untersuchen.

1 Die g-adische Zahldarstellung

Zuerst erinnern wir an zwei wichtige Sätze der elementaren Zahlentheorie. Die sogenannte *Division mit Rest* besagt, dass für gegebene Zahlen a, $b \in \mathbb{N}$ mit $b \neq 0$ eindeutig bestimmte Zahlen $q, r \in \mathbb{N}$ mit

$$a = q \cdot b + r, \qquad r < b$$

existieren. Der *Euklidische Algorithmus* besteht in fortgesetzter Division einer Zahl $r_0 \in \mathbb{N}$ mit Rest durch $r_1 \in \mathbb{N}$, wie folgt:

$$\begin{array}{ll} r_0 = a_0 \cdot r_1 + r_2, & 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 = a_1 \cdot r_2 + r_3, & 0 < r_3 < r_2 \\ \qquad \vdots & \qquad \vdots \\ r_{n-1} = a_{n-1} \cdot r_n + r_{n+1}, & 0 < r_{n+1} < r_n \\ r_n = a_n \cdot r_{n+1}, & r_{n+2} = 0. \end{array}$$

Da die Folge (r_i) der auftretenden Reste streng monoton fallend ist und nur natürliche Zahlen enthält, gibt es einen Rest, der gleich Null ist, sagen wir $r_{n+2} = 0$. Somit endet der Euklidische Algorithmus und man zeigt leicht, dass der letzte von Null verschiedene Rest, d.h. r_{n+1}, der größte gemeinsame Teiler von r_0 und r_1 ist.

Möchte man nun eine reelle Zahl identifizieren, z.B. um sie schriftlich zu übermitteln, so benötigt man ihre Darstellung bzgl. einer Basis g.

Satz 1.1. *Es sei $g \in \mathbb{N}_{>1}$. Jede reelle Zahl c besitzt eine Darstellung der Form*

$$c = \sum_{i=0}^{\ell} a_i \cdot g^i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \cdot g^{-i}, \qquad (a_i, b_i \in \{0, 1, \dots g-1\}).$$

Diese Darstellung heißt die g-adische Darstellung von c und wir schreiben auch $c = a_\ell \dots a_0, b_1 b_2 \dots$.

Beweis. Wir schreiben die reelle Zahl c zunächst als Summe ihres ganzen Anteils $[c] \in \mathbb{Z}$ und ihres gebrochenen Anteils $\{c\} \in [0,1)$:

$$c = [c] + \{c\}.$$

Für den gebrochenen Anteil $\{c\}$ erhalten wir schrittweise:

$$\{c\} = b_1 \cdot g^{-1} + r_1,\ r_1 = b_2 \cdot g^{-2} + r_2,\ r_2 = b_3 \cdot g^{-3} + r_3, \ldots \quad (r_i \in \mathbb{R}, r_i < g^{-i}),$$

d.h. $b_1 = [g\{c\}]$, $b_2 = [g^2 r_1]$, $b_3 = [g^3 r_2]$, usw.. Somit ergibt sich insgesamt

$$\{c\} = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \cdot g^{-i}, \qquad (b_i \in \{0,1,\ldots,g-1\}).$$

Analog ergibt sich für den ganzen Anteil mit Hilfe von Divison mit Rest

$$[c] = \sum_{i=0}^{\ell} a_i \cdot g^i, \qquad (a_i \in \{0,1,\ldots,g-1\});$$

hierbei ist $\ell \in \mathbb{N}$ die größte natürliche Potenz mit $g^\ell < [c]$. Somit ergibt sich insgesamt die behauptete Darstellung. □

Die rationalen Zahlen lassen sich nun wie folgt charakterisieren.

Satz 1.2. *Die g-adische Darstellung einer reellen Zahl c ist endlich oder periodisch genau dann, wenn c rational ist.*

Beweis. Besitzt die g-adische Darstellung von $c \in \mathbb{R}$ genau k ($k \in \mathbb{N}$) Nachkommastellen, dann können wir $c = \frac{\tilde{c}}{g^k}$ mit $\tilde{c} \in \mathbb{Z}$ schreiben. Somit ist c als Quotient zweier ganzer Zahlen selbst rational. Ist die g-adische Darstellung von $c \in \mathbb{R}$ jedoch periodisch mit Periodenlänge $p \in \mathbb{N}_{>0}$, dann können wir die Periode eliminieren, indem wir die Differenz $z := c \cdot g^p - c$ bilden. Da z per Konstruktion eine endliche g-adische Darstellung besitzt, ist z rational und somit ist auch $c = \frac{z}{g^p - 1}$ rational.

Ist umgekehrt eine rationale Zahl $c = \frac{a}{b}$ gegeben, so berechnet sich die g-adische Darstellung rekursiv:

$$\begin{aligned} a &= q_0 \cdot b + r_0 \qquad (r_0 < b, r_0 \in \{0,1,\ldots,b-1\}); \\ g^{i+1} \cdot r_i &= q_{i+1} \cdot b + r_{i+1} \qquad (r_i < b, r_i \in \{0,1,\ldots,b-1\}; i \geq 0). \end{aligned}$$

Man erkennt, dass es nur b mögliche Reste für die Reste r_i gibt, sodass es nach dem Schubfachschluss zu einer Wiederholung kommen muss. Folglich wiederholen sich die Reste ab der ersten dieser Stellen, sprich die g-adische Darstellung von c ist periodisch. Umfasst die Periode nur Nullen, dann ist die g-adische von c Darstellung abbrechend. $\square$

Satz 1.3. *Eine rationale Zahl* $q = \frac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbb{Z}$ *mit* $\operatorname{ggT}(a, b) = 1)$ *hat eine endliche* g*-adische Darstellung genau dann, wenn* b *als Primteiler nur die Primfaktoren von* g *besitzt.*

Beweis. Falls b als Primteiler nur die Primfaktoren von g besitzt, erkennt man durch geeignetes Erweitern des Bruches $\frac{a}{b}$ sofort, dass die zugehörige g-adische Darstellung endlich ist. Besitzt $q = \frac{a}{b}$ umgekehrt eine endliche g-adische Darstellung, so können wir wieder $q = \frac{\tilde{q}}{g^k}$ mit $\tilde{c} \in \mathbb{Z}$ und $k \in \mathbb{N}$ schreiben, d.h. es gilt $a \cdot g^k = \tilde{q} \cdot b$. Da $b|(\tilde{q} \cdot b)$, folgt sofort $b|(a \cdot g^k)$, und wegen $\operatorname{ggT}(a, b) = 1$ muss somit $b|g^k$ gelten. Dies beweist die Behauptung. $\square$

2 Kettenbrüche

2.1 Darstellung rationaler Zahlen

Wir beginnen mit dem folgenden Beispiel

$$\frac{37}{13} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{13}{11}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{11}{2}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2}}} = [2; 1, 5, 2].$$

Die platzsparende Notation $\frac{37}{13} = [2; 1, 5, 2]$ verallgemeinert man wie folgt.

Definition 2.1. *Wir definieren einen endlichen Kettenbruch über*

$$[a_0] := a_0, \qquad [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] := \left[a_0; a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\right].$$

Dabei ist in allgemeinster Form $a_i \in \mathbb{R}$, *es wird aber meist angestrebt, dass* $a_0 \in \mathbb{Z}$ *und* $a_i \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ *für alle* $i > 0$ *ist.*

Bemerkung. Aus der Definition ergibt sich die ausgeschriebene Form

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}.$$

Damit lässt sich die Bezeichnung „Kettenbruch" nachvollziehen.

Algorithmus (Euklidischer Algorithmus). Es ist der Bruch $\frac{r_0}{r_1}, r_0 \in \mathbb{Z}, r_1 \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ als Kettenbruch $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ mit $a_0 \in \mathbb{Z}$ und $a_i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ für $i \geq 1$ darzustellen. Wähle dazu a_i und r_i, sodass:

$$r_0 = a_0 r_1 + r_2, \quad r_1 = a_1 r_2 + r_3, \ldots \quad r_{j-1} = a_{j-1} r_j + r_{j+1}, \quad r_j = a_j r_{j+1}.$$

Allgemein findet sich also $a_i = \left[\frac{r_i}{r_{i+1}}\right]$ und $\frac{r_{i+1}}{r_{i+2}} = \left\{\frac{r_i}{r_{i+1}}\right\}^{-1}$, bis $\frac{r_{i+1}}{r_{i+2}} \in \mathbb{Z}$.

Dass dieses Verfahren einen Kettenbruch mit $[a_0; a_1, \ldots, a_j] = \frac{r_0}{r_1}$ liefert, zeigt vollständige Induktion. Trivialerweise ist ein endlicher Kettenbruch mit ganzen $a_i, i \in \mathbb{N}$, stets eine rationale Zahl. Damit gilt der folgende

Satz 2.2. *Jede rationale Zahl lässt sich als endlicher Kettenbruch darstellen und jeder endliche Kettenbruch notiert eine rationale Zahl.*

Bemerkung. Die Darstellung einer rationalen Zahl als Kettenbruch ist jedoch nicht eindeutig; zum Beispiel gilt $\frac{r_0}{r_1} = [a_0; a_1, \ldots, a_j] = [a_0; a_1, \ldots, a_j - 1, 1]$, da $a_j = (a_j - 1) + \frac{1}{1}$; damit lässt sich stets eine zweite Darstellung finden. Verbietet man jedoch die 1 als letztes Element, so ist die Kettenbruchdarstellung in der Tat eindeutig, wie später gezeigt wird.

2.2 Unendliche Kettenbrüche

Wir wollen auch zu einer irrationalen Zahl eine Kettenbruchdarstellung finden. Da jeder endliche Kettenbruch eine rationale Zahl notiert, müssen wir zunächst unendliche Kettenbrüche definieren.

Definition 2.3. *Für eine Folge ganzer Zahlen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $a_i > 0$ für alle $i > 0$, ist der unendliche Kettenbruch definiert als*

$$[a_0, a_1, \ldots] := \lim_{i\to\infty} [a_0, a_1, \ldots, a_i].$$

Wir wollen nun die Konvergenz der unendlichen Kettenbrüche nachweisen. Dazu werden wir zunächst den i-ten Kettenbruch in einer anderen Form darstellen, die es uns erlaubt, Aussagen über die Konvergenz zu treffen. Dies geschieht über Näherungsbrüche $A_i = \frac{p_i}{q_i}$, die wir wie folgt definieren:

$$\begin{aligned} p_{-2} &:= 0, \quad p_{-1} := 1, \quad p_i := a_i p_{i-1} + p_{i-2} \\ q_{-2} &:= 1, \quad q_{-1} := 0, \quad q_i := a_i q_{i-1} + q_{i-2}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Lemma 2.4. *Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt mit einem $X \in \mathbb{R}$ die Gleichheit*

$$[a_0; a_1, \ldots, a_{i-1}, X] = \frac{p_{i-1}X + p_{i-2}}{q_{i-1}X + q_{i-2}}.$$

Beweis. Der Beweis erfolgt mit Hilfe vollständiger Induktion unter Anwendung der Rekursionsvorschriften (2.1). □

Der Spezialfall $X = a_i$ beschert uns nun das Gewünschte:

$$[a_0; a_1, \ldots, a_i] = \frac{p_i}{q_i} = A_i.$$

Mit Hilfe vollständiger Induktion beweist man nun das folgende Lemma.

Lemma 2.5. *Es gelten die äquivalenten Gleichungen*

$$\begin{aligned} p_{i-1}q_i - p_i q_{i-1} &= (-1)^i, & (\forall i \geq -1, i \in \mathbb{Z}), \qquad (2.2) \\ A_{i-1} - A_i &= \frac{(-1)^i}{q_{i-1}q_i}, & (\forall i \geq 1, i \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$A_i - A_{i-2} = \frac{(-1)^i a_i}{q_{i-2}q_i} \qquad (\forall i \geq 2, i \in \mathbb{N}).$$

Dieses Lemma besagt, dass die Näherungsbrüche A_i alternieren und die Abstände zudem für $i \to \infty$ gegen 0 gehen, da $q_i \geq i$ für alle $i \geq 1$ gilt. Dies besagt, dass alle A_i mit geradem i streng monoton wachsen und alle A_i mit ungeradem $i \geq 3$ streng monoton fallen. Es ergibt sich somit für die Näherungsbrüche A_i die Ungleichungen

$$A_0 < A_2 < A_4 < \ldots < A_5 < A_3 < A_1.$$

Da beide Teilfolgen $(A_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(A_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ durch die Glieder der jeweils anderen Folge beschränkt und streng monoton sind, müssen beide konvergieren; da der Abstand wie oben bemerkt gegen 0 geht, konvergiert die gesamte Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Grenzwert α. Es bleibt zu zeigen, dass dieser Grenzwert irrational ist. Angenommen, $\alpha = \frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Da wir wissen, dass $A_i \neq \alpha$ für alle $i \geq 0$ gilt, folgt

$$\frac{1}{bq_i} \leq \left| \frac{aq_i - bp_i}{bq_i} \right| = |\alpha - A_i| < |A_{i+1} - A_i| = \frac{1}{q_i q_{i+1}}.$$

Damit folgt $q_{i+1} < b$ für alle $i \geq 0$. Dies ist aber unmöglich, da die Folge $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt ist. Zusammenfassend haben wir somit folgenden

Satz 2.6. *Ein unendlicher Kettenbruch $[a_0; a_1, \ldots]$ mit ganzzahligem a_0 und natürlichen a_i für $i \geq 1$ notiert eine irrationale Zahl.*

Bemerkung. Der Beweis der Konvergenz eines jeden unendlichen Kettenbruchs berechtigt uns zur Definition 2.3.

2.3 Darstellung irrationaler Zahlen

Da uns bei der Darstellung einer rationalen Zahl der Euklidische Algorithmus zu den Kettenbruchelementen verholfen hat, versuchen wir zunächst, diesen sinnvoll auf eine irrationale Zahl α_0 zu erweitern:

Algorithmus. Es sei $\alpha_i = \frac{r_i}{r_{i+1}}$, $a_i = [\alpha_i]$ und $\alpha_{i+1} = \{\alpha_i\}^{-1}$. Dann schreibt sich der Euklidische Algorithmus wie folgt:

$$\alpha_i = a_i + \alpha_{i+1}^{-1}.$$

Dabei ist offensichtlich $\alpha_i > 1$ für alle $i \geq 1$ und $\alpha_i \notin \mathbb{Q}$. Außerdem ist $a_0 \in \mathbb{Z}$ und $a_i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ für alle $i \geq 1$.

Lemma 2.7. *Für alle $i \in \mathbb{N}$ mit aus obigem Algorithmus gefundenen a_i und α_i gilt*

$$\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_{i-1}, \alpha_i].$$

Der Beweis dieses Lemmas erfolgt wieder über vollständige Induktion. Dabei ist das letzte Element des endlichen Kettenbruchs jedoch noch irrational.

Satz 2.8. *Jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ lässt sich eindeutig als Kettenbruch darstellen. Im endlichen Fall (also $\alpha \in \mathbb{Q}$) muss die 1 als letztes Glied eines mindestens zweigliedrigen Kettenbruchs ausgeschlossen werden.*

Beweis. Es ist zuerst noch zu zeigen, dass sich jedes irrationale α eindeutig in einen Kettenbruch entwickeln lässt. Wir notieren α_i wie in Lemma 2.7, sodass $\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_i, \alpha_{i+1}]$ gilt. Nach Lemma 2.4 gilt

$$\alpha = \frac{p_i \alpha_{i+1} + p_{i-1}}{q_i \alpha_{i+1} + q_{i-1}}.$$

Daraus folgern wir

$$\alpha - \frac{p_i}{q_i} = \frac{q_i p_{i-1} - p_i q_{i-1}}{q_i(q_i \alpha_{i+1} + q_{i-1})} \overset{(2.2)}{=} \frac{(-1)^i}{q_i(q_i \alpha_{i+1} + q_{i-1})},$$

was die Abschätzungen

$$|\alpha - A_i| < \frac{1}{q_i(q_i+1)} \leq \frac{1}{i(i+1)} \tag{2.3}$$

impliziert. Damit ist α der Grenzwert der Näherungsbruchfolge, d.h. es gilt $\lim_{i\to\infty} A_i = \alpha$.
Es muss noch gezeigt werden, dass die Darstellung auch eindeutig ist. Dies geschieht mittels Beweis durch Widerspruch und vollständiger Induktion. Wir nehmen also an, es gebe die folgenden zwei Kettenbruchentwicklungen:

$$[a_0; a_1, \ldots] = \alpha = [a'_0; a'_1, \ldots].$$

Wir betrachten nun die Aufgabe, die Elemente des Kettenbruchs zu einem α_i zu bestimmen und bedienen uns dabei voriger Überlegungen. Dann muss – wie im beschriebenen Algorithmus – $a_i + \alpha_{i+1}^{-1} = a'_i + \alpha'^{-1}_{i+1}$ gelten. Daraus folgt aber, da $0 < \alpha_{i+1}^{-1}, \alpha'^{-1}_{i+1} < 1$ ist, dass $a_i = a'_i$ gelten muss, die ersten beiden Elemente also gleich sind. Nun ist das Problem auf das Problem der Darstellung der α_{i+1} und α'_{i+1} zurückgeführt, wo dieselben Überlegungen wieder angestellt werden können. Damit müssen sich beide Darstellungen gleichen und der Beweis durch Widerspruch ist vollbracht.
Diese Überlegungen sind auch auf die Darstellung rationaler Zahlen übertragbar. Dabei sind zwei Punkte zu beachten: Erstens muss wie oben bemerkt das letzte Element der Kettenbrüche ungleich 1 sein. Zweitens muss die Möglichkeit unterschiedlicher Gliederanzahlen der beiden Darstellungen in Betracht

gezogen werden. In diesem Fall muss jedoch mit Längen i und mindestens $i+1$ gelten, dass $a_i - a'_i = \alpha'^{-1}_{i+1} \in (0;1)$ gilt, da $\alpha_{i+1} > 1$. Dies ist allerdings ein Widerspruch zur Ganzzahligkeit von a_i und a'_i. $\square$

Bemerkung. Wie die Approximation (2.3) besagt, lässt sich eine reelle Zahl α durch die Näherungsbrüche A_i deutlich besser approximieren als durch Näherungsbrüche, die aus einer g-adischen Darstellung gewonnen werden.

Für den Satz von Lagrange benötigen wir zuerst die

Definition 2.1. Eine Zahl x ist genau dann reell-quadratisch, wenn Koeffizienten $A, B, C \in \mathbb{Z}, A \neq 0$ existieren, sodass $Ax^2 + Bx + C = 0$ gilt, wobei die Diskriminante $B^2 - 4AC > 0$ und keine Quadratzahl ist.

Satz 2.9 (Satz von Lagrange)**.** *Jede reell-quadratische Irrationalzahl α hat einen unendlichen periodischen Kettenbruch.*

Bemerkung. Um Satz 2.9 zu beweisen, wird zunächst ein quadratisches Polynom mit α als Nullstelle hergeleitet. Dann wird gezeigt, dass – nach der obigen Nomenklatur – alle α_i Lösungen von quadratischen Gleichungen mit derselben Diskriminante sind. Außerdem kann gezeigt werden, dass die Anzahl der möglichen Koeffizienten der Gleichungen beschränkt ist. Damit gibt es für die unendlich vielen α_i nur endlich viele mögliche Werte; daraus folgt nach dem Dirichletschen Schubfachprinzip, dass für ein i ein $h \in \mathbb{N}$ mit $\alpha_i = \alpha_{i+h}$ existiert, woraus wiederum $a_i = a_{i+h}$ folgt. Damit ist der Kettenbruch periodisch und der Satz bewiesen.

Bemerkung. Die Umkehrung des Satzes 2.9 ist ebenfalls gültig und wurde von Euler bewiesen.

3 Goldener Schnitt und Farey-Folgen

3.1 Ein Beispiel: der Goldener Schnitt

Der einfachste unendliche Kettenbruch, auf den aber bisher noch nicht eingegangen wurde, ist der Kettenbruch, der ausschließlich aus Einsen besteht:

$$[1;\bar{1}] = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}.$$

Da die Zahl x, die unter dem ersten Bruchstrich steht, aufgrund der besonderen Gestalt des Kettenbruches genau gleich diesem ist, ergibt sich die Gleichung: $x = 1 + \frac{1}{x} \iff x^2 - x - 1 = 0$. Diese Gleichung hat die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Somit folgt, dass $[1; \bar{1}] = x_1$ gleich dem goldenen Schnitt Φ ist; die negative Lösung x_2 ist die Gegenzahl des kleinen goldenen Schnitts ϕ.

Bemerkung. Auf die gleiche Weise kann man auch andere periodischen Kettenbrüche berechnen: man formt die Gleichung so um, dass der ganze Kettenbruch wieder dem unteren Teil des Bruches entspricht, setzt diesen Teil mit dem Gesamten gleich und löst die entstehende quadratische Gleichung.

Wir erinnern nun an die folgende Definition

Definition 3.1. *Der Mediant zweier Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{a'}{b'}$ ist gegeben durch*

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{a'}{b'} = \frac{a + a'}{b + b'}.$$

Betrachten wir nun die Folge

$$\frac{1}{1}; \frac{2}{1}; \frac{3}{2}; \frac{5}{3}; \frac{8}{5}; \frac{13}{8}; \frac{21}{13}; \frac{34}{21}; \frac{55}{34}; \frac{89}{55}; \frac{144}{89}; \frac{233}{144}; \ldots$$

der Näherungsbrüche (A_i) von $[1; \bar{1}]$, so beobachten wir, dass jedes Folgenglied der Mediant seiner beiden Vorgänger ist.

3.2 Farey-Folgen

In diesem Zusammenhang tritt eine Eigenschaft zu Tage, die für eine bestimmte Folgen typisch sind, die sogenannten Farey-Folgen.

Definition 3.2. *Die n-te Farey-Folge F_n ist die geordnete Menge aller vollständig gekürzten Brüche $0 \leq \frac{a}{b} \leq 1$, deren Nenner nicht größer als n ist, angeordnet vom kleinsten bis zum größten Bruch.*

Die ersten drei Farey-Folgen sind:

$$F_1 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\}, \quad F_2 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\}, \quad F_3 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right\}.$$

Aus dieser Aufzählung lassen sich zwei Vermutungen ableiten: Zum Einen fällt auf, dass diese Mengen gewissermaßen symmetrisch sind: Addiert man zwei Farey-Brüche derselben Farey-Folge, die gleich weit vom Zentrum $\frac{1}{2}$ entfernt sind, so erhält man stets 1. Die Zahl $\frac{1}{2}$ stellt also gewissermaßen die Symmetrieachse einer Farey-Folge dar. Eine weitere Auffälligkeit besteht darin, dass der Betrag der Differenz $a'b - b'a$ zweier aufeinanderfolgender Brüche $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$ einer Farey-Folge stets 1 ist.

Definition 3.3. *Zweier beliebige Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{a'}{b'}$ heißen Farey-benachbart, wenn*

$$\left| \frac{a}{b} - \frac{a'}{b'} \right| = \frac{1}{bb'}$$

oder äquivalent dazu $|a'b - ab'| = 1$ gilt.

Satz 3.4. *Zwei aufeinanderfolgende Brüche $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$ in einer Farey-Folge sind Farey-benachbart.*

Beweis. Es seien $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}$ benachbarte Farey-Brüche. Da $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ gilt, existieren $x, y \in \mathbb{N}$ mit $bx - ay = 1$. Wenn (x_0, y_0) eine Lösung dieser Gleichung ist, trifft das auch für $(x_0 + t \cdot a, y_0 + t \cdot b)$ zu. Also ist der Abstand zweier aufeinanderfolgender y-Werte $|y_{t+1} - y_t| = b$. Demnach gibt es eine Lösung (x, y), sodass $0 \leq n - b < y \leq n$ gilt. Da $x, y \in \mathbb{N}$ und beide im richtigen Bereich liegen, ist $\frac{x}{y} \in F_n$, also:

$$\frac{x}{y} = \frac{bx}{by} = \frac{ay + 1}{by} = \frac{a}{b} + \frac{1}{by} > \frac{a}{b}.$$

Angenommen es gilt $\frac{x}{y} > \frac{a'}{b'}$, dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{by} = \frac{x}{y} - \frac{a}{b} &= \left(\frac{x}{y} - \frac{a'}{b'} \right) + \left(\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} \right) = \frac{b'x - a'y}{b'y} + \frac{ba' - ab'}{bb'} \\ &\geq \frac{1}{b'y} + \frac{1}{bb'} = \frac{b + y}{b'by} > \frac{n}{b'by} \geq \frac{1}{by}. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch, also war unsere Annahme falsch und wir folgern

$$\frac{a}{b} < \frac{x}{y} \leq \frac{a'}{b'} \Longrightarrow \frac{x}{y} = \frac{a'}{b'} \Longrightarrow x = a'; y = b' \Longrightarrow a'b - ab' = 1.$$

Dies beweist die Behauptung. □

Farey-Folgen besitzen folgende weitere Eigenschaften.

Satz 3.5. *Jeder Bruch einer Farey-Folge ist Mediant seiner beiden Nachbarn.*

Beweis. Dies zeigt man durch eine elementare Rechnung. □

Satz 3.6. *Es seien $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}$ Farey-benachbarte Brüche mit $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}$. Dann gilt:*

$$\frac{a}{b} < \frac{a+a'}{b+b'} < \frac{a'}{b'}.$$

Zudem ist $\frac{a+a'}{b+b'}$ der Bruch zwischen $\frac{a}{b}$ und $\frac{a'}{b'}$ mit dem kleinsten Nenner.

Beweis. Dies zeigt man durch eine elementare Rechnung. □

Mit Hilfe von Farey-Folgen lässt sich schließlich der folgende Approximationssatz von Dirichlet beweisen.

Satz 3.7. *Es seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann existieren $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(p,q) = 1$ und $0 < q < n$ derart, dass gilt:*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q(n+1)}.$$

Literatur

[1] P. Bundschuh, *Einführung in die Zahlentheorie*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[2] B. Werner, *Kettenbrüche. Probevorlesung für Erstsemester*, Online-Skript, 2008.