Flächen und ihre Krümmungen

Teilnehmer:

Levi Borodenko	Käthe-Kollwitz-Oberschule, Berlin
Anna Heinrich	Käthe-Kollwitz-Oberschule, Berlin
Jochen Jacobs	Herder-Oberschule, Berlin
Robert Jendersie	Immanuel-Kant-Oberschule, Berlin
Tanja Lappe	Heinrich-Hertz-Oberschule, Berlin
Manuel Radatz	Immanuel-Kant-Oberschule, Berlin
Maximilian Rogge	Immanuel-Kant-Oberschule, Berlin

Gruppenleiter:

Helga Baum, Humboldt-Universität zu Berlin

Gekrümmten Flächen begegnet man auf Schritt und Tritt. Die Zeltdachkonstruktion des Münchner Olympiastadions beispielsweise besteht aus gekrümmten Flächen, Kühltürme haben eine gekrümmte Oberfläche, auch die Erdoberfläche ist gekrümmt. Berühmte Mathematiker wie Carl Friedrich Gauß (1777-1855) haben Methoden entwickelt, mit denen man die Krümmung von Flächen exakt beschreiben kann. In vielen Fällen kann man mit Hilfe der *lokalen* Krümmungsgrößen Aussagen über die *globale* Gestalt der Fläche machen.
In unserem Kurs haben wir uns zunächst mit Kurven und Flächen und ihren Parametrisierungen beschäftigt. Anschließend haben wir die Krümmung ebener Kurven behandelt und davon ausgehend die verschiedenen Krümmungsbegriffe für Flächen (Normalenkrümmungen, Hauptkrümmungen, Gauß-Krümmung und mittlere Krümmung) kennengelernt und an Beispielen berechnet.

1 Einleitung

1.1 Aufgabe

Flächen und ihre Krümmungen begegnen uns alltäglich. Doch wie lassen sich diese mathematisch darstellen? Welche Arten von Krümmungen werden unterschieden und wie kann man sie berechnen?

2 Parameterisierung geometrischer Objekte

Um Punktmengen im Raum zu beschreiben, gibt es mehrere Möglichkeiten. So bilden alle Punkte der folgenden Menge einen Kreis vom Radius r:

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}.$$

Weitere Untersuchungen, wie sie im Folgenden vorgenommen werden, machen eine andere Beschreibung sinnvoll, die Parametrisierung. Diese haben wir anhand mehrerer Beispiele betrachtet.

2.1 Parametrisierung von Kurven

Definition 2.1. Eine *parametrisierte Kurve* im $\mathbb{R}^n$ ist eine 2-mal stetig differenzierbare Abbbildung $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall ist.
Die parametrisierte Kurve γ heißt *regulär*, wenn $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Das Intervall I heißt *Parameterbereich der Kurve* γ. Ist $n = 2$, so nennen wir γ *ebene Kurve*. Ist $n = 3$, so nennen wir γ *Raumkurve*.

Der einleitende Kreis K lässt sich auch durch einen einzelnen Parameter beschreiben, den Drehwinkel α. Die den Kreis parametrisierende Kurve hat die Form

$$\gamma(\alpha) = (r \cos \alpha, r \sin \alpha).$$

Lässt man α von 0 bis 2π gehen, wird jeder Punkt des Kreises genau einmal besucht. Vorteil dieser Beschreibung ist, dass die Werkzeuge der Analysis darauf anwendbar sind, was für die Untersuchung der Krümmung essenziell ist. Die Ableitung

$$\gamma'(\alpha) = (-r \sin \alpha, r \cos \alpha)$$

beschreibt den Richtungsvektor der *Tangente an den Kreis K im Punkt* $\gamma(\alpha)$:

$$Tan_{\gamma(\alpha)} K := \gamma(\alpha) + \mathbb{R} \cdot \gamma'(\alpha).$$

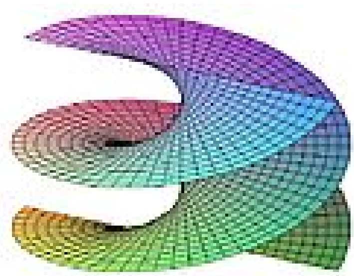
2.2 Parametrisierung von Flächen

Wie die im vorherigen Abschnitt betrachteten Kurven, lassen sich auch Flächen im Raum parametrisieren. Im Gegensatz zu den Kurven benötigt man dabei *zwei* Parameter, die einen Bereich $U \subset \mathbb{R}^2$ durchlaufen. Um Flächen im Raum zu parametrisieren, benutzt man dann eine 2-mal stetig differenzierbare Abbildung $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, deren Bild die Fläche S beschreibt.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Flächen aus schon bekannten Kurven herzustellen. Z.B. kann man eine Kurve, die in der x-z-Ebene liegt, um die z-Achse rotieren lassen. Dabei entsteht eine Rotationsfläche. Man kann auch ein Geradenstück entlang einer Kurve im Raum bewegen. Die so entstehenden Flächen heißen Regelflächen. Ein Beispiel für eine Regelfläche ist die *Wendelfläche*, welche im Weiteren noch genauer untersucht werden soll. Sie lässt sich durch ein an die z-Achse angeheftetes und zur x-y-Ebene paralleles Geradenstück beschreiben, welches um die z-Achse rotiert und sich dabei in die Höhe schraubt. In Form einer Parametrisierung sieht das so aus:

$$f(r, \alpha) = (r \cos \alpha, r \sin \alpha, h\alpha),$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ den Drehparameter und $r \in (-R, R)$ den Geradenparameter beschreibt.



Für Parametrisierungen mit mehreren Parametern, beziehungsweise für Funktionen mehrerer Variablen, ist ein zusätzlicher Begriff der Differentialrechnung erforderlich. Eine solche Funktion lässt sich jeweils nach nur genau einer Variablen ableiten. Diese Operation wird als *partielle Ableitung* bezeichnet. Dabei werden alle nicht abzuleitenden Variablen wie Konstanten behandelt:

$$\frac{\partial f}{\partial u_1}(u_1, u_2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(u_1 + h, u_2) - f(u_1, u_2)}{h},$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_2}(u_1, u_2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(u_1, u_2 + h) - f(u_1, u_2)}{h}.$$

Für die Wendelfläche erhält man als partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r,\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha}(r,\alpha) = (-r\sin\alpha, r\cos\alpha, h).$$

Die partiellen Ableitungen haben die folgende geometrische Bedeutung:
Ist $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die Parametrisierung einer Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ und $p \in S$ ein Punkt auf der Fläche mit den beiden Parametern (u_1, u_2), d.h. $p = f(u_1, u_2)$, dann sind

$$\begin{array}{rcll} t \in (u_1 - \varepsilon, u_1 + \varepsilon) \subset \mathbb{R} & \mapsto & f(t, u_2) \in S & \qquad \text{und} \\ s \in (u_2 - \varepsilon, u_2 + \varepsilon) \subset \mathbb{R} & \mapsto & f(u_1, s) \in S & \end{array}$$

Kurven auf der Fläche, die für den Parameter $t = u_1$ bzw. $s = u_2$ gerade durch den Punkt p laufen. Diese Kurven heißen Koordinatenlinien durch p. Die beiden partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial u_1}(u_1, u_2)$ und $\frac{\partial f}{\partial u_1}(u_1, u_2)$ sind dann die Tangentialvektoren an die Kordinatenlinien zum u_1- bzw. zum u_2-Parameter.
Wir setzen für die Parametrisierung $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ der Fläche S immer voraus, dass diese beiden Tangentialvektoren vom Nullvektor verschieden und linear unabhängig sind. Dann spannen sie die *Tangentialebene an die Fläche S im Punkt* $p = f(u_1, u_2)$ auf, die beschrieben wird durch

$$Tan_p\, S := p + \mathbb{R} \cdot \frac{\partial f}{\partial u_1}(u_1, u_2) + \mathbb{R} \cdot \frac{\partial f}{\partial u_2}(u_1, u_2).$$

Für die Definition der Krümmungen der Fläche wird außer der Tangentialebene im Punkt p auch ein *Normalenvektor* $N(p)$ benötigt, der senkrecht auf der Tangentialebene steht und die Länge 1 hat.
Solche Vektoren liefert die Operation des Vektorprodukts. Für zwei Vektoren $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ und $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ definiert man das Vektorprodukt durch

$$\vec{a} \times \vec{b} := (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ steht sowohl auf $\vec{a}$ als auch auf $\vec{b}$ senkrecht. Teilt man ihn zusätzlich durch seine *Länge* $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$, so erhält man einen Vektor $\frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}$ der Länge 1.
Deshalb erhält man den Normalenvektor $N(p)$ für die Fläche S im Punkt p durch:

$$N(p) = \frac{\frac{\partial f}{\partial u_1}(u_1, u_2) \times \frac{\partial f}{\partial u_2}(u_1, u_2)}{\|\frac{\partial f}{\partial u_1}(u_1, u_2) \times \frac{\partial f}{\partial u_2}(u_1, u_2)\|}.$$

Damit sind die Grundlagen gelegt und wir können uns der Krümmung zuwenden.

3 Krümmungen von Kurven und Flächen

3.1 Die Krümmung von ebenen Kurven

Es sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ eine ebene reguläre Kurve. $\vec{v}$ sei eine fixierte Richtung im $\mathbb{R}^2$ (z.B. $\vec{v} = (1,0)$). Dann kann man den orientierten Winkel zwischen dieser Richtung $\vec{v}$ und der Tangente an die Kurve im Punkt $\gamma(s)$ (bzw. ihrem Richtungsvektor $\gamma'(s)$) bestimmen. Dieser Winkel wird mit $\varphi(s)$ bezeichnet. Um die Krümmung zu berechnen, betrachtet man die Veränderung dieses Winkels auf einem kleinen Intervall $[s_1, s_2]$, also $\varphi(s_2) - \varphi(s_1)$. Hat man zwischen den Parametern s_1 und s_2 ein längeres Kurvenstück durchlaufen, wird die Kurve bei gleichbleibender Winkeldifferenz weniger gekrümmt erscheinen. Deshalb ist es sinnvoll, das Verhältnis von $\varphi(s_2) - \varphi(s_1)$ und der Bogenlänge zu betrachten. Die *Krümmung eines Kurvenstücks* $\gamma|_{[s_1,s_2]}$ kann man dann für dicht beieinander liegende Parameter wie folgt definieren:

$$\kappa(s_1, s_2) := \frac{\varphi(s_2) - \varphi(s_1)}{l(\gamma|_{[s_1,s_2]})}.$$

Dabei lässt sich die Bogenlänge $l(\gamma|_{[s_1,s_2]})$ durch die Formel

$$l(\gamma|_{[s_1,s_2]}) = \int_{s_1}^{s_2} \|\gamma'(t)\| dt$$

berechnen. Für den Fall $\gamma(x) = (x, h(x))$ gilt zum Beispiel für die Länge:

$$l(\gamma|_{[s_1,s_2]}) = \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{1 + \big(h'(x)\big)^2}\, dx.$$

Nun wollen wir aber die Krümmung der Kurve nicht von einem Kurvenstück, sondern in einem Punkt $\gamma(t)$ bestimmen. Dazu betrachten wir Parameter s_1 und s_2 mit $s_1<t<s_2$ und bilden den Grenzwert für $s_1 \to t$ und $s_2 \to t$:

$$\kappa(t) := \lim_{s_1 \to t^-,\, s_2 \to t^+} \kappa(s_1, s_2) = \lim_{s_1 \to t^-,\, s_2 \to t^+} \frac{\varphi(s_2) - \varphi(s_1)}{l(\gamma|_{[s_1,s_2]})} = \frac{\varphi'(t)}{\|\gamma'(t)\|}.$$

Dieser Quotient ist die *Krümmung der Kurve* γ *im Punkt* $\gamma(t)$. Diese ist auch auf anderen Wegen zu berechnen:

$$\kappa(t) = \frac{\det\big(\gamma'(t)\ \gamma''(t)\big)}{\|\gamma'(t)\|^3},$$

wobei wir für zwei Vektoren $\vec{a} = (a_1, a_2)$ und $\vec{b} = (b_1, b_2)$ mit $\det\big(\vec{a}\ \vec{b}\big)$ die Determinante einer Matrix bezeichnen:

$$\det\big(\vec{a}\ \vec{b}\big) := \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} := a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1.$$

Wenn γ eine Parametriserung ist, die die Kurve mit konstanter Geschwindigkeit 1 durchläuft, d.h. $\|\gamma'(t)\| = 1$ für alle Parameter $t \in I$ (I ist der Definitionsbereich von γ), so gilt außerdem:

$$\kappa(t) = \langle \gamma''(t), n(t) \rangle.$$

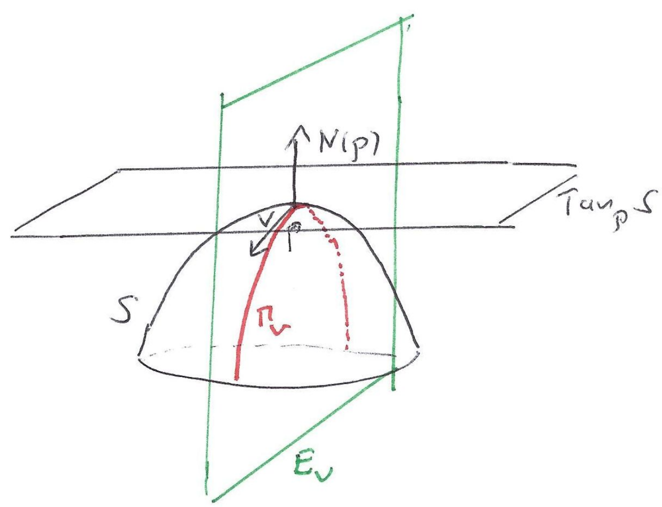
Dabei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt der (eingesetzten) Vektoren und $n(t)$ den Einheitsnormalenvektor an die Kurve γ im Parameter t, der durch Drehung von $\gamma'(t)$ um $90°$ in positive Richtung entsteht.

3.2 Die Krümmungen von Flächen

Bei der Definition der Krümmungen von Flächen werden wir auf die im letzten Abschnitt definierte Krümmung ebener Kurven zurückgreifen. Um die Krümmungen einer Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ im Punkt $p \in S$ zu beschreiben, schneiden wir die Fläche S mit den Ebenen

$$E_{\vec{v}} := p + \mathbb{R} \cdot \vec{v} + \mathbb{R} \cdot N(p),$$

wobei $\vec{v}$ ein Tangentialvektor an die Fläche im Punkt p mit der Länge 1 ist (siehe Abbildung).



Die Schnittkurve

$$\Gamma_{\vec{v}} := S \cap E_{\vec{v}}$$

ist eine Kurve in der Ebene $E_{\vec{v}}$. Ihre Krümmung im Punkt $p \in \Gamma_{\vec{v}}$ bezeichnen wir mit $k_n(\vec{v})$. Man nennt diese Krümmung die *Normalenkrümmmung der Fläche S im Punkt p in Richtung $\vec{v}$*. Die Normalenkrümmungen $k_n(\vec{v})$ kann man mit der folgenden Formel berechnen, wenn γ eine Parametrisierung der Kurve $\Gamma_{\vec{v}}$ ist, für die $\|\gamma(0)\| = p$, $\|\gamma'(0)\| = \vec{v}$ und $\|\gamma'(t)\| = 1$ für alle t gilt:

$$k_n(\vec{v}) = \langle \gamma''(0), N(p) \rangle.$$

3.2.1 Die Hauptkrümmungen

Unter den Tangentialvektoren an die Fläche im Punkt p gibt es auch einen Vektor der Länge 1, für den die Normalenkrümmung minimal wird und auch einen, für den die Normalenkrümmung maximal wird. Diese beiden Normalenkrümmungen heißen die *Hauptkrümmungen von S im Punkt p* und werden mit λ_1 und λ_2 bezeichnet. Die zugehörigen Vektoren heißen *Hauptkrümmungsvektoren in $p \in S$*.

$$\begin{aligned} \lambda_1(p) &:= \min\{k_n(\vec{v}) \mid \vec{v} \in T_pS,\ \|\vec{v}\| = 1\}, \\ \lambda_2(p) &:= \max\{k_n(\vec{v}) \mid \vec{v} \in T_pS,\ \|\vec{v}\| = 1\}. \end{aligned}$$

Die beiden Hauptkrümmungsvektoren haben die Eigenschaft, dass sie senkrecht zueinander stehen.

3.2.2 Die Gauß-Krümmung und die mittlere Krümmung

Die Gauß-Krümmung $K(p)$ und die mittlere Krümmung $H(p)$ der Fläche S im Punkt p sind folgendermaßen definiert:

$$K(p) := \lambda_1(p) \cdot \lambda_2(p),$$

$$H(p) := \tfrac{1}{2} \cdot \big(\lambda_1(p) + \lambda_2(p)\big).$$

Ist $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung von S und sind $u = (u_1, u_2)$ die Parameter des Punktes $p \in S$, d.h. $f(u_1, u_2) = p$, so lassen sich die Gauß-Krümmung und die mittlere Krümmung von S im Punkt p mit Hilfe der Parametrisierung f explizit berechnen:

$$K(p) = \det\Big(\big(g_{ij}(p)\big)^{-1} \circ \big(h_{ij}(p)\big)\Big),$$

$$H(p) = \tfrac{1}{2} \cdot \mathrm{Spur}\Big(\big(g_{ij}(p)\big)^{-1} \circ \big(h_{ij}(p)\big)\Big).$$

$\big(g_{ij}(p)\big)$ und $\big(h_{ij}(p)\big)$ repräsentieren dabei jeweils 2x2-Matrizen, deren Eintrag in der Zeile i und in der Spalte j entsprechend folgendermaßen ausgerechnet wird:

$$g_{ij}(p) := \Big\langle \frac{\partial f}{\partial u_i}(u), \frac{\partial f}{\partial u_j}(u) \Big\rangle,$$

$$h_{ij}(p) := \Big\langle \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(u), N(p) \Big\rangle.$$

3.2.3 Ein Beispiel: Berechnung der Gauß-Krümmung und der mittleren Krümmung für die Wendelfläche

Wir wollen als Beispiel die Gauß-Krümmung sowie die mittlere Krümmung der bereits bekannten Wendelfläche berechnen, welche durch folgende Parametrisierung beschrieben wird:

$$f(r,\alpha) = (r\cdot\cos\alpha, r\cdot\sin\alpha, h\cdot\alpha), \qquad \alpha\in\mathbb{R}, r\in(0,R).$$

Zur Berechnung der zweiten Ableitungen und der Normalen benötigen wir zunächst die ersten Ableitungen:

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial f}{\partial\alpha}(r,\alpha) &= (-r\cdot\sin\alpha, r\cdot\cos\alpha, h),\\
\tfrac{\partial f}{\partial r}(r,\alpha) &= (\cos\alpha, \sin\alpha, 0).
\end{aligned}$$

Nun können wir die zweiten Ableitungen bilden:

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}(r,\alpha) &= (-r\cdot\cos\alpha, -r\cdot\sin\alpha, 0),\\
\tfrac{\partial^2 f}{\partial r\partial\alpha}(r,\alpha) &= \tfrac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial r}(r,\alpha) = (-\sin\alpha, \cos\alpha, 0),\\
\tfrac{\partial^2 f}{\partial r^2}(r,\alpha) &= (0,0,0).
\end{aligned}$$

Jetzt berechnen wir den Normalenvektor:

$$\begin{aligned}
N(p) &= \frac{(\cos\alpha,\sin\alpha,0)\times(-r\cdot\sin\alpha, r\cdot\cos\alpha, h)}{\|(\cos\alpha,\sin\alpha,0)\times(-r\cdot\sin\alpha, r\cdot\cos\alpha, h)\|}\\
&= \frac{(h\cdot\sin\alpha, -h\cdot\cos\alpha, r)}{\sqrt{(h\cdot\sin\alpha)^2+(-h\cdot\cos\alpha)^2+r^2}}\\
&= \frac{(h\cdot\sin\alpha, -h\cdot\cos\alpha, r)}{\sqrt{h^2+r^2}}.
\end{aligned}$$

Nun brauchen wir die beiden Matrizen. Zunächst berechnen wir die Matrix $\big(g_{ij}(p)\big)$:

$$\big(g_{ij}(p)\big) := \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial r}\right\rangle & \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial \alpha}\right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial f}{\partial \alpha}, \frac{\partial f}{\partial r}\right\rangle & \left\langle \frac{\partial f}{\partial \alpha}, \frac{\partial f}{\partial \alpha}\right\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h^2+r^2 \end{pmatrix}.$$

Die inverse Matrix ist somit:

$$\big(g_{ij}(p)\big)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h^2+r^2} \end{pmatrix}.$$

Als nächstes brauchen wir die Matrix $\big(h_{ij}(p)\big)$:

$$\big(h_{ij}(p)\big) := \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}, N \right\rangle & \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \alpha}, N \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial r}, N \right\rangle & \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}, N \right\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-h}{\sqrt{h^2+r^2}} \\ \frac{-h}{\sqrt{h^2+r^2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun ist das Produkt beider Matrizen zu ermitteln:

$$\big(g_{ij}(p)\big)^{-1} \circ \big(h_{ij}(p)\big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h^2+r^2} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & \frac{-h}{\sqrt{h^2+r^2}} \\ \frac{-h}{\sqrt{h^2+r^2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-h}{\sqrt{h^2+r^2}} \\ \frac{-h}{(h^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses Produkt muss man jetzt nur noch in die beiden Formeln einsetzen. Dann erhalten wir die beiden gesuchten Krümmungen.

$$\begin{aligned} K(p) &= \det\Big(\big(g_{ij}(p)\big)^{-1} \circ \big(h_{ij}(p)\big)\Big) = \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{-h}{\sqrt{h^2+r^2}} \\ \frac{-h}{(h^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\left(\frac{h}{h^2+r^2}\right)^2, \\ H(p) &= \tfrac{1}{2} \cdot \mathrm{Spur}\Big(\big(g_{ij}(p)\big)^{-1} \circ \big(h_{ij}(p)\big)\Big) = \tfrac{1}{2} \cdot \mathrm{Spur} \begin{pmatrix} 0 & \frac{-h}{\sqrt{h^2+r^2}} \\ \frac{-h}{(h^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$