

Kurven

Mathematische Beschreibung, Eigenschaften, Visualisierungen

Teilnehmer:

Zeno Diemer	Herder-Oberschule
Max Freiburghaus	Heinrich-Hertz-Oberschule
Verena Klös	Herder-Oberschule
Cuong Le Viet	Heinrich-Hertz-Oberschule
Eike Müller	Herder-Oberschule
Michaela Ridder	Herder-Oberschule

Gruppenleiter:

Andreas Filler	Pädagogische Hochschule Heidelberg
----------------	------------------------------------

Unsere Arbeitsgruppe befasste sich mit der Darstellung und Animation von Kurven in Parameterdarstellung. Dabei spielte das experimentelle Variieren von Kurven mit Hilfe eines Computer-Algebra Programmes eine wichtige Rolle. Neben diesem praktischen Bereich beschäftigten wir uns auch mit der Herleitung von Bogenlänge, Bahngeschwindigkeit, Krümmung, Tangentenvektor und Normalenvektor in Parameterdarstellung. Der zweite Teil der Gruppenarbeit behandelte Kurven, die aus anderen Kurven entstehen. Ein Beispiel sind die Evoluten, die aus den Mittelpunkten der Krümmungskreise entstehen. Am letzten Tag waren Zykloiden zentraler Bestandteil der Arbeit. Neben theoretischem Inhalt und generellem Verständnis war auch die Beschreibung der Kurven durch Funktionsvorschriften in Parameterdarstellung wesentlich in den Lernprozess eingebunden.

1 Einführung und Beispiele

1.1 Grundlagen

Definition: Eine Kurve ist das Bild einer Parameterdarstellung oder einer Vektorfunktion ($\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow V$). Im Allgemeinen wird Injektivität verlangt (injektive Funktion: Abb. „von“, eineindeutig).

- In Parameterdarstellung hängen alle Vektorkomponenten von einem Laufparameter ab.
- Die Vektorfunktion ($\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$) induziert eine „Punktfunktion“ im \mathbb{R}^n , da Vektoren als Ortsvektoren von Punkten interpretiert werden können.
- $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist der Ortsvektor von $P(x | y)$.
- Für die Vektorfunktion φ gilt: $\varphi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \vdots \end{pmatrix}$.

Im Allgemeinen wird mehrfache Differenzierbarkeit verlangt.

- Eine Kurve heißt *glatt*, wenn die zugehörige Parameterdarstellung mindestens einmal stetig differenzierbar ist.

Differenzierbarkeit: Eine Vektorfunktion ($\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow V$) heißt differenzierbar an einer Stelle $t_0 \in I$, wenn $\dot{\varphi}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0}$ existiert.

- Es gilt: $\dot{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \end{pmatrix}$.
- Nachgewiesen für zweidimensionale Vektorfunktionen:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= \frac{1}{t - t_0} \cdot (\varphi(t) - \varphi(t_0)) \\ &= \frac{1}{t - t_0} \left(\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{t - t_0} \begin{pmatrix} x(t) - x(t_0) \\ y(t) - y(t_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{t - t_0} (x(t) - x(t_0)) \\ \frac{1}{t - t_0} (y(t) - y(t_0)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Ableitung des Skalarproduktes zweier Funktionen φ und ψ ist (analog zur Produktregel):

$$\frac{d}{dt} \left(\begin{pmatrix} x_\varphi(t) \\ y_\varphi(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_\psi(t) \\ y_\psi(t) \end{pmatrix} \right) = \frac{d}{dt} (x_\varphi(t) \cdot x_\psi(t) + y_\varphi(t) \cdot y_\psi(t)) = \dot{\varphi}(t)\psi(t) + \varphi(t)\dot{\psi}(t)$$

Regularität: Eine Kurve ist genau dann regulär, wenn die Ableitung ihrer Parameterfunktion auf ganz I verschieden von $\vec{0}$ ist:

$$\dot{\varphi}(t) \neq \vec{0} \text{ f. a. } t \in I.$$

1.2 Ausgewählte 2D-Kurven

Zur Veranschaulichung der Parameterdarstellung wurden zunächst in der Ebene Beispielfunktionen betrachtet. Durch Komplizierung der Funktionsvorschriften entstanden verschiedene Kurven.

1.2.1 Der Kreis

Ein Kreis mit dem Radius r und dem Mittelpunkt $M(0 | 0)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= r \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t) \\ y(t) &= r \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t) \end{aligned}$$

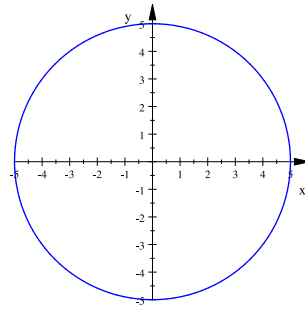


Abbildung 1: Kreis

1.2.2 Archimedische Spirale

Bei proportionaler Abhängigkeit des Radius vom Parameter t ergibt sich eine Spirale mit konstantem Windungsabstand.

$$\begin{aligned} r(t) &= t \\ x(t) &= r(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t) \\ y(t) &= r(t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t) \end{aligned}$$

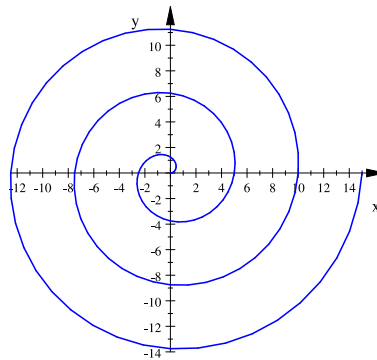


Abbildung 2: Archimedische Spirale

1.2.3 Logarithmische Spirale

Bei der logarithmischen Spirale schrumpft der Radius exponentiell über t .

$$\begin{aligned} r(t) &= e^{-t} \\ x(t) &= r(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t) \\ y(t) &= r(t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t) \end{aligned}$$

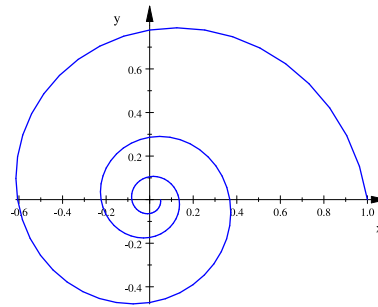


Abbildung 3: Logarithmische Spirale

1.2.4 „Halbquadratische Schnecke“*

Die „halbquadratische Schnecke“ ist eine Variation der Archimedischen Schnecke. Eine der Koordinaten (hier x) hängt vom Quadrat des Parameters t ab.

$$\begin{aligned} x(t) &= t^2 \cdot \cos(2\pi t) \\ y(t) &= t \cdot \sin(2\pi t) \end{aligned}$$

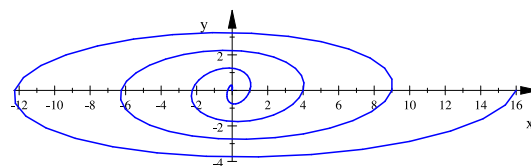


Abbildung 4: „Halbquadratische Schnecke“

1.2.5 „Sinuskreis“

Diese Kurve entsteht durch Abhängigkeit des Radius von $\sin(t)$.

$$\begin{aligned} r(t) &= \sin(t) \\ x(t) &= r(t) \cdot \cos(2\pi t) \\ y(t) &= r(t) \cdot \sin(2\pi t) \end{aligned}$$

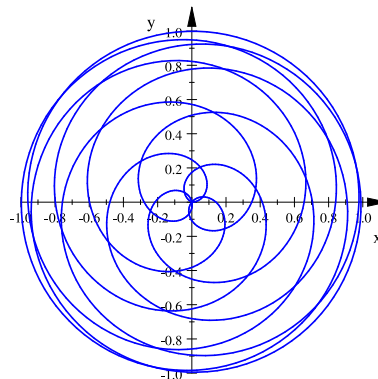


Abbildung 5: „Sinuskreis“

1.2.6 „Blumenkurve“

Ähnlich wie beim Sinuskreis ergibt sich hier für $r(t)$ die Wertemenge $\{1;3\}$. Dadurch entsteht die Blütenform der Kurve.

$$\begin{aligned} r(t) &= 2 + \sin(20\pi t) \\ x(t) &= r(t) \cdot \cos(2\pi t) \\ y(t) &= r(t) \cdot \sin(2\pi t) \end{aligned}$$

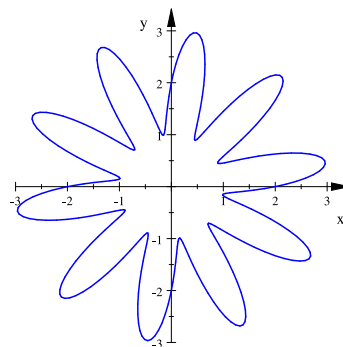


Abbildung 6: „Blumenkurve“

* Die Bezeichnungen in Anführungsstrichen wurden den Kurven von den Teilnehmerinnen und Teilnehmern des Kurses gegeben.

1.3 Ausgewählte 3D-Kurven

1.3.1 Raumhelix

Eine der einfachsten dreidimensionalen Kurven ist die Raumhelix (Schraubenlinie). Betrachtet man nur $x(t)$, $y(t)$ ergibt sich ein Kreis. Dieser wird von $z(t) = t$ schraubenförmig auseinandergezogen.

$$\begin{aligned}x(t) &= r \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t) \\y(t) &= r \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t) \\z(t) &= t\end{aligned}$$

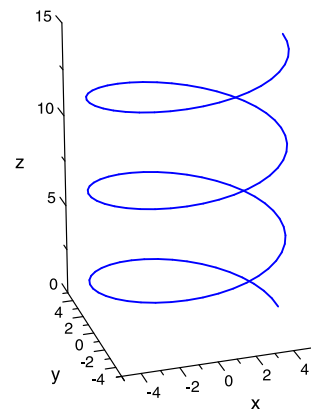


Abbildung 7: Raumhelix

1.3.2 Konische Spirale

Der Zusammenhang zwischen konischer Spirale und Archimedischer Spirale ist genauso wie der von Raumhelix und Kreis.

$$\begin{aligned}r(t) &= t \\x(t) &= r(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot t) \\y(t) &= r(t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t) \\z(t) &= t\end{aligned}$$

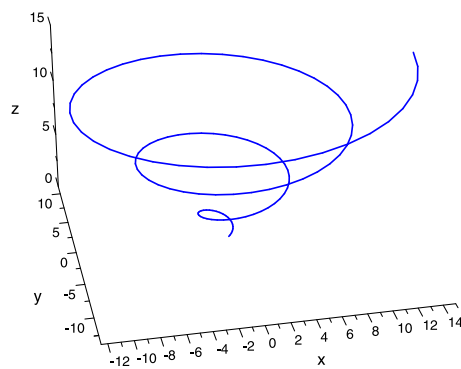


Abbildung 8: Konische Spirale

1.3.3 „Schraubenblume“

Diese wendeltreppenähnliche Kurve entsteht durch eine in z -Richtung und im Radius von t abhängige „Blumenkurve“.

$$\begin{aligned}r(t) &= t \cdot (1 + \sin(16\pi t)) \\x(t) &= r(t) \cdot \cos(2\pi t) \\y(t) &= r(t) \cdot \sin(2\pi t) \\z(t) &= t\end{aligned}$$

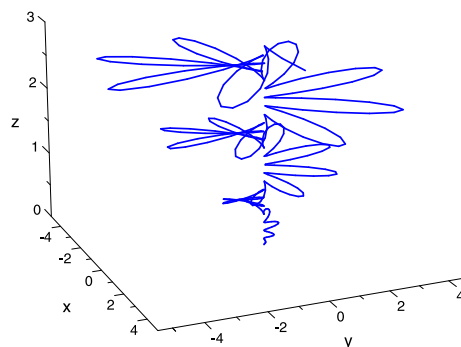


Abbildung 9: „Schraubenblume“

1.3.4 „Hyperbelschnecke“

Die „Hyperbelschnecke“ basiert auf einer Raumhelix, die sich aufgrund einer Hyperbel als Hüllkurve um ein Paraboloid windet.

$$\begin{aligned}
r &= h(t) \\
h(t) &= \sqrt{t^2 + 1} \\
x(t) &= r \cdot \cos(6\pi t) \\
y(t) &= r \cdot \sin(6\pi t) \\
z(t) &= t
\end{aligned}$$

Hüllkurve:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \pm h(t) \\
y(t) &= 0 \\
z(t) &= t
\end{aligned}$$

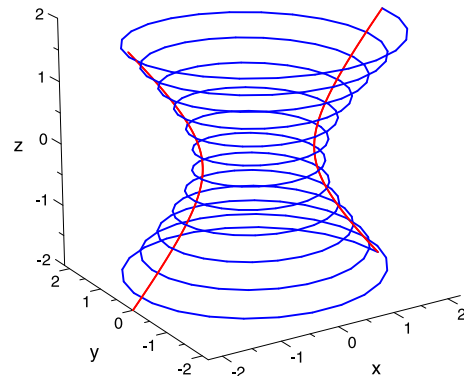


Abbildung 10: „Hyperbelschnecke“

1.3.5 „Kugelschnecke“

Anders als bei der „Hyperbelschnecke“ wurde hier ein Kreis als Hüllkurve verwendet.

$$\begin{aligned}
r &= h(t) \\
h(t) &= \sqrt{1 - t^2} \\
x(t) &= r \cdot \cos(14\pi t) \\
y(t) &= r \cdot \sin(14\pi t) \\
z(t) &= t
\end{aligned}$$

Hüllkurve:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \pm h(t) \\
y(t) &= 0 \\
z(t) &= t
\end{aligned}$$

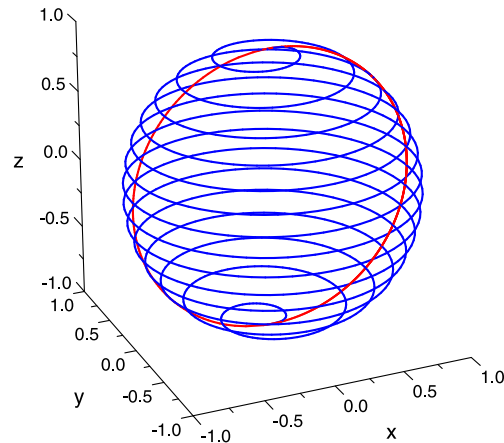


Abbildung 11: „Kugelschnecke“

1.3.6 Doppelte „Kugelschnecke“

Die „Doppelte Kugelschnecke“ entsteht durch Vertauschen der y -Koordinate mit der z -Koordinate. Dargestellt sind sowohl die ursprüngliche „Kugelschnecke“, wie auch die gedrehte.

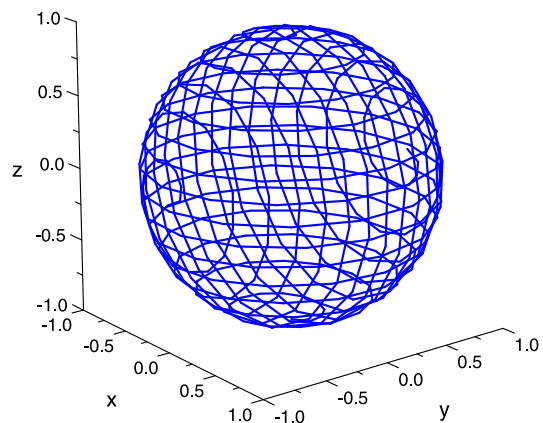


Abbildung 12: „Doppelte Kugelschnecke“

1.3.7 „Ballkurve“

Eine weitere Kugel ergibt sich, wenn man den „Sinuskreis“ in der dritten Dimension von $\cos(t)$ abhängig lässt.

$$\begin{aligned} r(t) &= \sin(t) \\ x(t) &= r(t) \cdot \cos(2\pi t) \\ y(t) &= r(t) \cdot \sin(2\pi t) \\ z(t) &= \cos(t) \end{aligned}$$

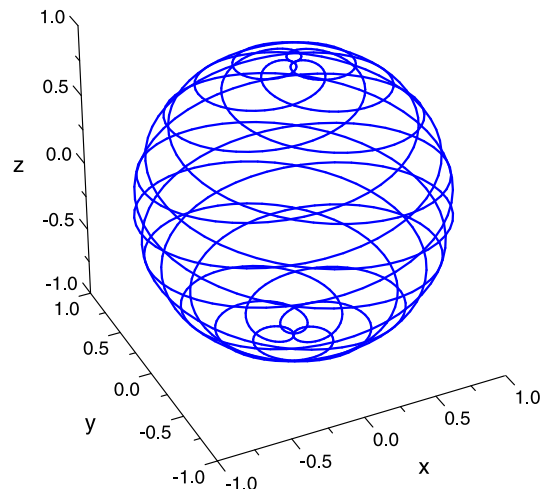


Abbildung 13: „Ballkurve“

1.3.8 „Kronleuchter“

Der „Kronleuchter“ ergibt sich aus einer Raumhelix mit Radiusfunktion $r(t) = t \cdot \sin(t)$.

$$\begin{aligned} r(t) &= t \cdot \sin(t) \\ x(t) &= r(t) \cdot \cos(20\pi t) \\ y(t) &= r(t) \cdot \sin(20\pi t) \\ z(t) &= t \end{aligned}$$

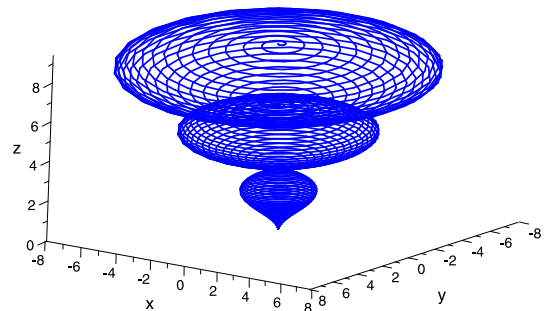


Abbildung 14: „Kronleuchter“

1.3.9 „Blumenkurve“

Durch gezieltes Ausprobieren entstand eine Kurve, die gewisse Ähnlichkeiten zu einer Blüte aufweist. Zu Grunde lag die zweidimensionale „Blumenkurve“.

$$\begin{aligned} r &= 5 \\ s(t) &= 1 + r \cdot t + 0.7 \cdot \sin(t \cdot 20 \cdot \pi) \\ x(t) &= s(t) \cdot \cos(2 \cdot t \cdot \pi) \\ y(t) &= s(t) \cdot \sin(2 \cdot t \cdot \pi) \\ z(t) &= 0.01 \cdot r^2 \cdot (1 + \sin(20 \cdot t \cdot \pi)) \cdot t^2 \end{aligned}$$

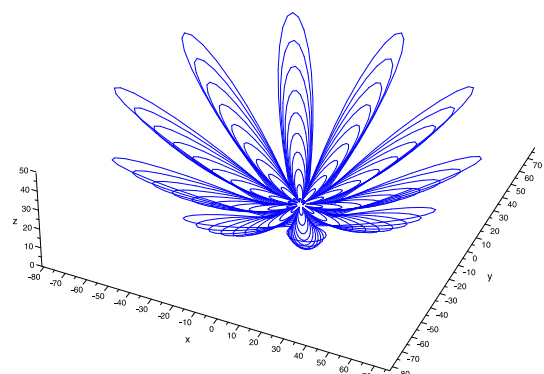


Abbildung 15: „3D-Blumenkurve“

1.4 Zykloiden

Zykloiden sind Kurven eines Punktes auf einem rollendem Rad.

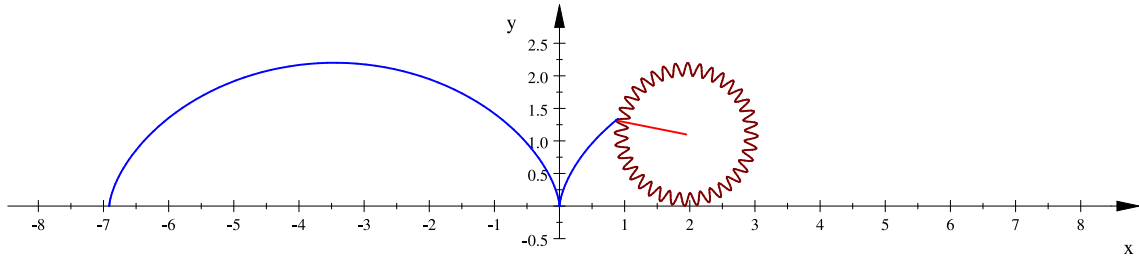


Abbildung 16: Konstruktion einer Zykloide

Der Punkt muss dabei nicht genau den Radius als Abstand zum Mittelpunkt haben, sondern kann auch weiter weg oder näher dran liegen.

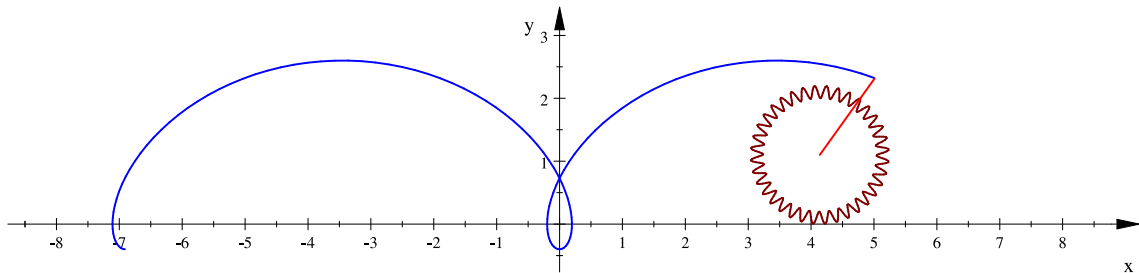


Abbildung 17: Variation der obigen Zykloide

Um auf die Parameterdarstellung der Zykloide zu kommen, muss man wissen, um welchen Winkel α sich das Rad dreht, wenn der Mittelpunkt des Rades sich um t nach rechts verschiebt. Der Umfang des Rades ist dabei $U = 2 \cdot \pi \cdot r$. Bewegt sich der Mittelpunkt nun um t nach rechts, so muss sich auch der Umfang um t abwickeln. Damit ergibt sich folgende Formel für α :

$$t = \frac{\alpha(t)}{2 \cdot \pi} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$\Leftrightarrow \alpha(t) = \frac{t}{r}$$

Hat man nun den Winkel α , ist es leicht auf die Parameterdarstellung der Zykloide zu kommen, denn diese setzt sich nur aus einer Kreisbewegung und einer linearen Bewegung zusammen. a ist dabei der Abstand des Mittelpunktes zu dem Punkt, dessen Bahnkurve gesucht ist.

$$x(t) = t + a \cdot \sin\left(\frac{t}{r}\right)$$

$$y(t) = r + a \cdot \cos\left(\frac{t}{r}\right)$$

1.4.1 Epizykloide

Das Rad muss natürlich nicht immer auf einer Geraden rollen, sondern kann sich auch um einen Kreis drehen. Diese Zykloide nennt man Epizykloide.

Die Rotation α lässt sich auf einem ähnlichen Weg berechnen. Allerdings muss dabei beachtet werden, dass sich das Rad auf einer Kreisbahn bewegt. Somit wird zusätzlich zu der Anzahl an Umdrehungen, die benötigt wird um den Umfang des Kreises zurückzulegen, eine weitere Umdrehung des Rades vollführt, da der Kreis einmal umrundet wird.

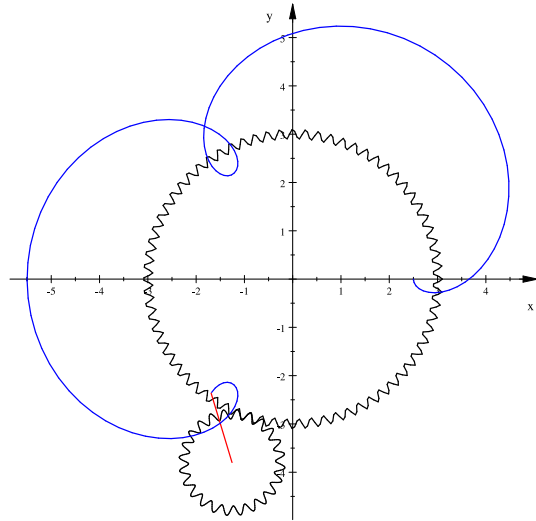


Abbildung 18: Konstruktion einer Epizykloide

$$x(t) = (r_1 + r_2) \cdot \cos(t) + a \cdot \cos\left(t \cdot \left(\frac{r_2}{r_1} + 1\right)\right)$$

$$y(t) = (r_1 + r_2) \cdot \sin(t) + a \cdot \sin\left(t \cdot \left(\frac{r_2}{r_1} + 1\right)\right)$$

Hierbei ist r_1 der Radius des rollenden und r_2 der Radius des umrollten Kreises.

1.4.2 Kardioiden

Haben Rad und Kreis den gleichen Radius, so spricht man von einer Kardioiden.

1.4.3 Hypozykloide

Die Hypozykloiden gehören zwar nicht zu den Epizykloiden, aber sie werden auch mit Hilfe einer Kreisbahn gebildet. Allerdings rollt das Rad im Inneren des Kreises an der Kreisbahn entlang.

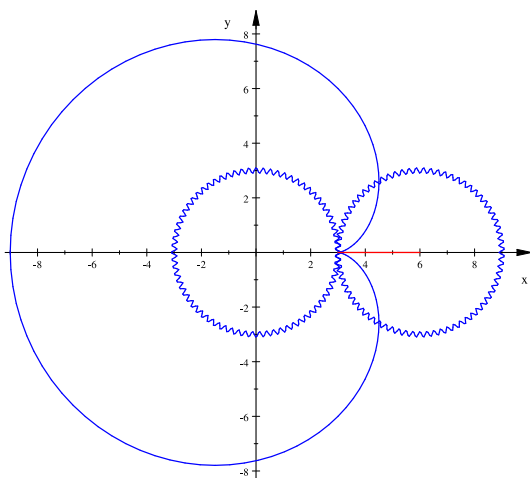


Abbildung 19: Kardioiden

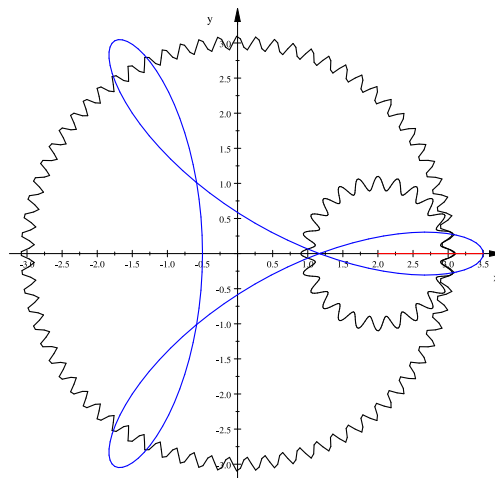


Abbildung 20: Acrobat als Hypozykloide

2 Ableitungen, Tangenten, Bahngeschwindigkeiten, Bogenlängen

2.1 Ableitungen und Tangenten

Sei $\varphi(t)$ die Parameterdarstellung einer Kurve. Ihre Ableitung $\dot{\varphi}(t)$ ergibt den Tangentenvektor. Wie aus der Physik bekannt ist, ergibt die Ableitung einer Strecke die Geschwindigkeit. Somit bezeichnet man den Tangentenvektor auch als Geschwindigkeitsvektor.

Bekanntermaßen ist die Ableitung einer zweidimensionalen Parameterdarstellung $\dot{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$.

Beispiel (Kreis):

Tangentenvektor eines Kreises:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \\ \dot{\varphi}(t) &= \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

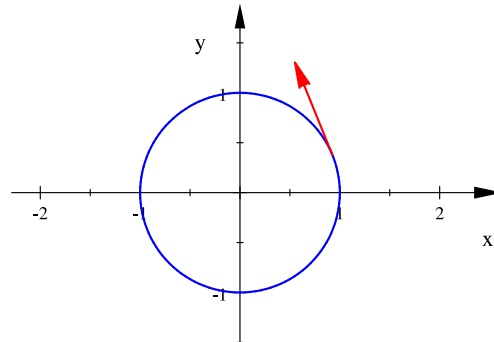


Abbildung 21: Kreis mit zugehörigem Tangentenvektor

2.2 Bahngeschwindigkeit

Es können zwei verschiedene Parametrisierungen mit identischer Kurve existieren, die sich jedoch in der Bahngeschwindigkeit unterscheiden.

Die Bahngeschwindigkeit $v(t)$ ist die Länge des Geschwindigkeitsvektors $\dot{\varphi}(t)$:

$$v(t) = |\dot{\varphi}(t)| = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}$$

Somit beträgt die Bahngeschwindigkeit des obigen Kreises:

$$\begin{aligned}v_{\text{Kreis}}(t) &= \sqrt{(-\sin(t))^2 + \cos^2(t)} \\ &= \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} \\ &= \sqrt{1} = 1\end{aligned}$$

2.3 Bogenlänge und entsprechende Parametrisierung

Die Bogenlänge lässt sich durch die Summe von Sekanten approximieren. Betrachtet man den Grenzwert dieser Summe, ergibt sich die Bogenlänge $s(t)$.

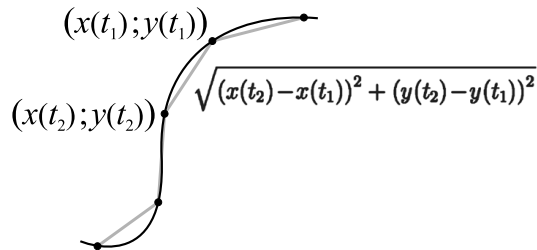


Abbildung 22: Approximation der Bogenlänge

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \lim_{t_i - t_{i+1} \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k+1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k+1}))^2} \\
 &= \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2(u) + \dot{y}^2(u)} \, du \\
 &= \int_0^t |\dot{\varphi}(u)| \, du
 \end{aligned}$$

Benutzt man die Parametrisierung nach der Bogenlänge, haben gleiche Kurven auch die gleiche Parametrisierung und die Bahngeschwindigkeit beträgt immer genau 1. Somit sind die Tangentenvektoren auf die Länge 1 normiert. Diese Parametrisierung vereinfacht vieles und wird auch ausgezeichnete Parametrisierung genannt, da sie bis auf eine additive Konstante eindeutig ist. Zur Unterscheidung bezeichnet man die Ableitung nach der Bogenlänge mit φ' .

Um eine Parametrisierung nach der Bogenlänge zu erhalten, benötigt man eine Funktion $t(s)$, die t in Abhängigkeit von s angibt, um diese anschließend in die Parametrisierung nach t einzusetzen. $t(s)$ erhält man durch eine entsprechende Umformung der Bogenlänge $s(t)$.

2.3.1 Beispiele:

Kreis:

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \int_0^t \sqrt{r^2 \cdot \sin^2(u) + r^2 \cdot \cos^2(u)} \, du \\
 &= r \cdot \int_0^t \sqrt{\sin^2(u) + \cos^2(u)} \, du \\
 &= r \cdot \int_0^t 1 \, du \\
 &= r \cdot t \\
 \Rightarrow t(s) &= \frac{s}{r} \\
 \Rightarrow \varphi(s) &= \begin{pmatrix} r \cdot \cos\left(\frac{s}{r}\right) \\ r \cdot \sin\left(\frac{s}{r}\right) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Zur Probe kann man die Bahngeschwindigkeit $v(s)$ berechnen:

$$\begin{aligned}
 v(s) &= |\varphi(t(s))'| \\
 &= \sqrt{\left(r \cdot \cos\left(\frac{s}{r}\right)'\right)^2 + \left(r \cdot \sin\left(\frac{s}{r}\right)'\right)^2} \\
 &= \sqrt{\frac{r^2}{r^2} \cdot \sin^2\left(\frac{s}{r}\right) + \frac{r^2}{r^2} \cdot \cos^2\left(\frac{s}{r}\right)} \\
 &= \sqrt{1} = 1
 \end{aligned}$$

Archimedische Spirale:

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \int_0^t \sqrt{(r \cdot \cos(u) - r \cdot u \cdot \sin(u))^2 + (r \cdot \sin(u) - r \cdot u \cdot \cos(u))^2} du \\
 &= r \cdot \int_0^t \sqrt{1 + u^2} du
 \end{aligned}$$

Durch Substitution mit $u = \sinh(a)$ und Verwendung von $1 = \cosh^2 - \sinh^2$ kommt man auf folgendes Ergebnis:

$$s(t) = \frac{1}{2} \cdot \left(\operatorname{arsinh}(t) + t \cdot \sqrt{t^2 + 1} \right)$$

Wie man leicht sieht, lässt sich $t(s)$ nicht als geschlossener Term angeben. Dennoch existiert eine Parametrisierung nach der Bogenlänge.

Logarithmische Spirale:

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \int_0^t \sqrt{(e^{-u})^2 \cdot (\cos(u) + \sin(u))^2 + (e^{-u})^2 \cdot (\sin(u) - \cos(u))^2} du \\
 &= \int_0^t e^{-u} \cdot \sqrt{2} du \\
 &= \sqrt{2} \cdot (1 - e^{-t}) \\
 \Rightarrow t(s) &= \frac{\ln\left(\frac{s}{\sqrt{\pi^2+1}} + 1\right)}{2} \\
 \Rightarrow \varphi(s) &= \begin{pmatrix} e^{\frac{-\ln\left(\frac{s}{\sqrt{\pi^2+1}}+1\right)}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\ln\left(\frac{s}{\sqrt{\pi^2+1}}+1\right)}{2}\right) \\ e^{\frac{-\ln\left(\frac{s}{\sqrt{\pi^2+1}}+1\right)}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\ln\left(\frac{s}{\sqrt{\pi^2+1}}+1\right)}{2}\right) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

3 Krümmung und Evoluten ebener Kurven

3.1 Normaleneinheitsvektor und Tangenteneinheitsvektor

Der Tangenteneinheitsvektor (TEV) sei $\vec{t}(t)$. Er entsteht durch Normierung des Tangentenvektors $\dot{\varphi}(t)$:

$$\vec{t}(t) = \begin{pmatrix} t_x(t) \\ t_y(t) \end{pmatrix} = \frac{\dot{\varphi}(t)}{|\dot{\varphi}(t)|} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}} \quad .$$

Damit ist er für alle regulären Kurven wegen der von $\vec{0}$ verschiedenen Ableitungen an jeder Stelle t des Definitionsbereiches definiert. Der TEV wäre der „Bahngeschwindigkeitsvektor“ einer nach der Bogenlänge $s(t)$ parametrisierten Kurve.

Das ermöglicht die Festlegung des Normaleneinheitsvektors (NEV) der Kurve, der in jedem Punkt senkrecht zu ihr steht und sich durch Drehung im positiven Drehsinn um $\frac{\pi}{2}$ aus dem TEV ergibt. Er wird mithilfe der Komponenten von $\vec{t}(t)$ dargestellt:

$$\vec{n}(t) = \begin{pmatrix} -t_y(t) \\ t_x(t) \end{pmatrix}$$

3.2 Krümmungsbegriff

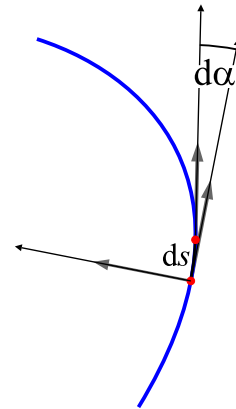
Zunächst wird von einer nach der Bogenlänge s parametrisierten Kurve ausgegangen. Bezogen auf das Analogon des zeitlichen Verlaufs einer Bewegung ist für eine solche Kurve die Bahngeschwindigkeit konstant, also ist die Radialbeschleunigung des bewegten Objekts proportional zur Krümmung:

Die Krümmung $K(s)$ einer ebenen Kurve ist eine reelle Zahl für den Winkel $d\alpha$, der je nach Fortschritt ds entlang der Kurve durch den Tangentenvektor überstrichen wird: Dieser Winkel sei bezüglich des TEV positiv orientiert. Er wird durch $\vec{t}'(s)$ beschrieben. Dieser ist wegen $|\vec{t}(s)| \equiv 1$ senkrecht (also kollinear oder antiparallel) zum TEV selbst. Damit drückt das Skalarprodukt

$$K(s) = \langle \vec{t}'(s), \vec{n}(s) \rangle$$

durch den ersten Faktor den Betrag der Krümmung sowie deren Vorzeichen durch den NEV aus. Insbesondere ergibt sich hieraus für linksgekrümmte Kurven eine positive und für rechtsgekrümmte eine negative Krümmungszahl. Da \vec{n} ein Einheitsvektor ist, muss er unabhängig von der Parametrisierung sein, also gilt auch:

$$K(s) = \langle \vec{t}'(s), \vec{n}(t) \rangle \quad (*)$$



Wegen der Parametrisierung nach s gilt:

$$\vec{t}'(s) = \varphi''(s) \quad (**).$$

Da eine Parametrisierung nach s wegen der strengen Monotonie der Funktion $s(t)$ bei jeder regulären Kurve über dem ganzen Definitionsbereich möglich ist, kann ein allgemeinerer Ausdruck der Krümmung in t versucht werden:

$$\begin{aligned} \varphi'' &= \frac{d}{ds} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) \cdot \frac{dt}{ds} + \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{d^2t}{ds^2} \\ &= \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2} \cdot \frac{dt}{ds} \right) \cdot \frac{dt}{ds} + \dot{\varphi} \cdot \frac{d^2t}{ds^2} = \ddot{\varphi} \cdot \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \dot{\varphi} \cdot \frac{d^2t}{ds^2} \end{aligned}$$

Damit ist die Krümmung einer regulären Kurve nach (*) und (**)

$$K = \left\langle \ddot{\varphi} \cdot \left(\frac{dt}{ds} \right)^2, \vec{n} \right\rangle + \left\langle \dot{\varphi} \cdot \frac{d^2t}{ds^2}, \vec{n} \right\rangle .$$

Wegen $\dot{\varphi}(t) \perp \vec{n}(t)$ für alle t des Definitionsbereiches ist das zweite Skalarprodukt Null. Ausklammern und Einsetzen des NEV (in der Parametrisierung nach t) liefern:

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{1}{\left(\frac{ds}{dt} \right)^2} \cdot \left\langle \ddot{\varphi}(t), \begin{pmatrix} -t_y(t) \\ t_x(t) \end{pmatrix} \right\rangle \\ \iff K(t) &= \frac{1}{|\dot{\varphi}(t)|^2} \cdot (-\ddot{x}(t) \cdot \dot{y}(t) + \ddot{y}(t) \cdot \dot{x}(t)) \cdot \frac{1}{|\dot{\varphi}(t)|} \\ \iff K(t) &= \frac{-\ddot{x}(t)\dot{y}(t) + \ddot{y}(t)\dot{x}(t)}{\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}^3} . \end{aligned}$$

3.3 Vom Krümmungskreis zur Evolute

Eine Kurve kann durch einen berührenden Kreis lokal angenähert werden. Krümmungskreis heißt der berührende Kreis, der am Berührungspunkt die gleiche Krümmung wie die Kurve hat. Dieser nähert die Kurve verglichen mit allen anderen Kreisen optimal an und ist durch die Funktion $K(t)$ an jeder Stelle eindeutig bestimmt. Die Krümmung eines Kreises ist konstant das Reziproke seines Radius. Evolute heißt die Ortskurve der Krümmungskreismittelpunkte, die demnach die Parameterdarstellung

$$\psi : \psi(t) = \begin{pmatrix} x(t) + \frac{n_x(t)}{K(t)} \\ y(t) + \frac{n_y(t)}{K(t)} \end{pmatrix}$$

hat, wobei $n_x(t)$ und $n_y(t)$ die Komponenten des NEV sind. Einsetzung der Formeln für $\vec{n}(t)$ und $K(t)$ liefert:

$$\psi_x(t) = x(t) - \frac{\dot{y}(t)}{|\dot{\varphi}(t)|} \cdot \frac{|\dot{\varphi}(t)|^3}{-\ddot{x}(t)\dot{y}(t) + \ddot{y}(t)\dot{x}(t)} \quad (1)$$

$$\psi_y(t) = y(t) + \frac{\dot{x}(t)}{|\dot{\varphi}(t)|} \cdot \frac{|\dot{\varphi}(t)|^3}{-\ddot{x}(t)\dot{y}(t) + \ddot{y}(t)\dot{x}(t)} \quad (2)$$

$$\implies \psi(t) = \begin{pmatrix} x(t) + \frac{\dot{y}(t) \cdot ((\dot{y}(t))^2 + (\dot{x}(t))^2)}{\ddot{x}(t)\dot{y}(t) - \ddot{y}(t)\dot{x}(t)} \\ y(t) + \frac{\dot{x}(t) \cdot ((\dot{y}(t))^2 + (\dot{x}(t))^2)}{-\ddot{x}(t)\dot{y}(t) + \ddot{y}(t)\dot{x}(t)} \end{pmatrix} \quad (***)$$

3.4 Beispiel der Astroide

Die Evolute einer Ellipse ist im Allgemeinen die Sternkurve oder Astroide, deren Parameterdarstellung ψ sich nach der allgemeinen Evolutenformel aus der Funktion φ einer Ellipse mit den Halbachsen a und b ergibt:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \begin{pmatrix} a \cos(t) \\ b \sin(t) \end{pmatrix} \\ \implies \psi(t) &= \begin{pmatrix} a \cos(t) - \frac{b \cos(t) \cdot (a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))}{ab} \\ b \sin(t) - \frac{a \sin(t) \cdot (a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))}{ab} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(a - \frac{b^2}{a}\right) \cos^3(t) \\ \left(b - \frac{a^2}{b}\right) \sin^3(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

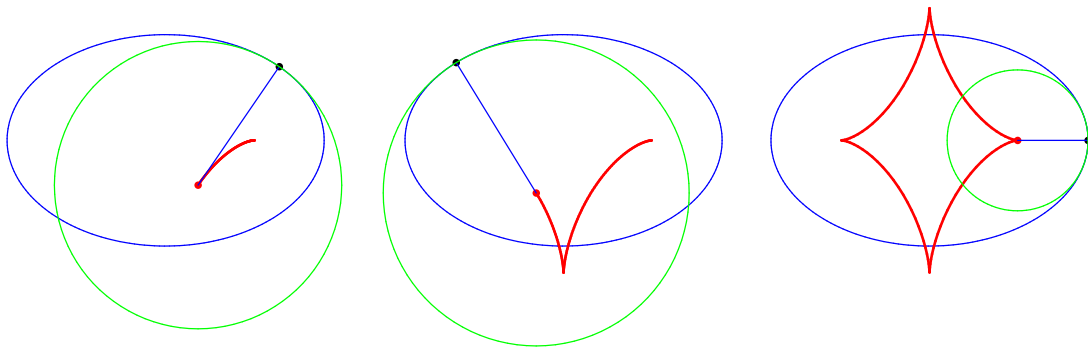


Abbildung 23: Entwicklung einer Ellipseevolute für wachsendes $t \in [0; 2\pi]$

3.5 Rekonstruktion einer Kurve aus ihrer Evolute

Sei die Evolute mit der Parameterdarstellung $\psi(t)$ gegeben.

3.5.1 Analytische Rekonstruktionsmöglichkeit

Aus der allgemeinen Evolutengleichung (***) entnimmt man bei gegebener Parameterdarstellung der Evolute das durch die Komponenten ψ_x und ψ_y gegebene nichtlineare inhomogene Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung mit den Variablen $x(t)$ und $y(t)$. Dessen Lösung wird abhängig von ψ allerdings fast nie analytisch sondern nur numerisch möglich sein. Mit gegebenen Anfangswerten $\varphi(t_0)$ und $\dot{\varphi}(t_1)$ für t_0, t_1 aus dem Definitionsbereich von φ ergeben sich dann wenige oder nur eine mögliche Partikulärlösung(en) von (***) .

3.5.2 Analytisch-geometrische Rekonstruktionsmöglichkeit...

Es ist $\psi(s) = \varphi(s) + \frac{\vec{n}(s)}{K(s)}$.

Nun wird Differenzierbarkeit der Evolute verlangt, also mindestens dreimalige Differenzierbarkeit der zu rekonstruierenden Funktion φ . Wie an der Ellipse ersichtlich ist auch dadurch nicht die Differenzierbarkeit der Evolute gesichert. Solche besonderen Fälle müssen intervallweise betrachtet werden. Die Funktionen werden nun nach der Bogenlänge der Kurve von φ parametrisiert verwendet. Für alle s des Definitionsbereiches von φ gilt also:

$\frac{d\psi}{ds} = \varphi'(s) + \left(\frac{1}{K(s)}\right)' + \frac{\vec{n}'(s)}{K(s)}$ (***) . Analog zur obigen Skalarproduktdefinition der Krümmung $K(s) = \langle \vec{t}'(s), \vec{n}(s) \rangle$ gilt $K(s) = \langle \vec{n}'(s), -\vec{t}(s) \rangle$, also auch $\vec{n}'(s) = -\vec{t}(s) \cdot K(s)$.

Damit ergibt sich aus der Parametrisierung von φ nach s aus(***):

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{ds} &= \vec{t}(s) + \left(\frac{1}{K(s)}\right)' \cdot \vec{n}(s) - \frac{K(s) \cdot \vec{t}(s)}{K(s)} \\ &= \left(\frac{1}{K(s)}\right)' \cdot \vec{n}(s) \end{aligned}$$

Wie im vorangegangenen Kapitel 2.3 erhält man die Länge $\sigma(s)$ der Evolute ab einem bestimmten Startwert als eine Stammfunktion von $\left|\frac{d\psi}{ds}\right|$. Diese kann nach der letzten Formel mit dem Krümmungsradius $r(s)$ der Kurve von φ in Beziehung gesetzt werden:

$$\left|\frac{d\psi}{ds}\right| = |r'(s)| = \frac{d\sigma}{ds}$$

Es werden stets beide Fälle für das Vorzeichen von $r'(s)$ betrachtet:

$$\implies \frac{d\sigma}{ds} = \pm r'(s)$$

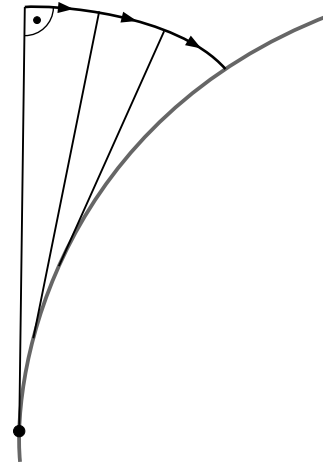
Damit folgt nach dem Monotoniesatz:

$$\sigma(s) \pm r(s) = \text{const.} \quad (****)$$

Diese Formel induziert die Konstruktion einer weiteren, für Parameterfunktionen φ charakteristischen Kurve.

3.5.3 ...durch Betrachtung der Evolvente

Anschaulich ist die Evolvente einer Kurve $\psi(\sigma)$ wie folgt erklärbar: Man befestige einen Faden tangential in einem Punkt $(\sigma_0; \psi(\sigma_0))$ an der Kurve und spanne ihn. Dann wird der Faden in gespannter Weise Stück für Stück auf $\psi(\sigma)$ zu liegen gebracht. Dabei ist das freie Ende des Fadens noch tangential zu $\psi(\sigma)$. Der Faden wird so lange „aufgewickelt“ bis sein freies Ende auch auf $\psi(\sigma)$ zu liegen kommt. Die während des gesamten Vorgangs von einem Stift am freien Ende des Fadens gezeichnete Kurve ist eine Evolvente von $\psi(\sigma)$. Offensichtlich entsteht durch Variation des Befestigungspunkts des Fadens bzw. der Fadenlänge eine Evolventenschar. Wenn der Faden in anderer Richtung „aufgewickelt“ wird, entsteht eine andere, im Allgemeinen nicht ähnliche Evolventenschar.



Falls eine Kurve nicht differenzierbare Stellen und/oder Wendestellen aufweist, muss demzufolge die Evolvente intervallweise definiert werden, da sie nicht über diese Stellen hinweg gebildet werden kann.

Wegen $(****)$ lässt sich nun folgern, dass eine Evolvente an die Evolute einer Kurve $\varphi(s)$ aus einer der beiden beschriebenen Scharen die Kurve $\varphi(s)$ selbst ist:

Der Fall $\sigma(s) + r(s) = \text{const.}$ legt nahe, das mit $\psi(\sigma)$ identische Fadenstück als $\sigma(s)$ zu interpretieren und den Restfaden als Krümmungsradius der Evolvente (siehe 3.4, mittleres Bild bei der Entwicklung der Astroide).

Im Fall $r(s) - \sigma(s) = \text{const.}$ wird die Evolutenlänge im gleichen Richtungssinn wie im ersten Fall betrachtet, nur wächst sie hier durch Abwickeln des Fadens wie zum Beispiel in 3.4, linkes Bild bei der Entwicklung der Astroide. Hierbei ergibt

sich die Konstanz von $\sigma(s) - r(s)$, indem man sich einen Punkt auf der noch vorausliegenden Evolute als Bezugspunkt wählt und den Wickelvorgang rückwärts durchführt, also entgegen der Parametrisierung von $\varphi(s)$ und das bei positiver Wicklung eigentlich noch voorausliegende, also kleiner werdende Fadenstück zum gewählten Bezugspunkt als $\sigma(s)$ betrachtet.

Die Evolvente zeichnet sich also durch die Konstanz der Länge des zu wickelnden Fadens aus. Damit Mit der gezeigten Konstanz $\sigma(s) + r(s)$ zwischen Kurve und Evolute stellt die Evolventenbildung gewissermaßen eine mehrdeutige Umkehrung der Evolutenbildung dar und umgekehrt.

Mit den Anfangswerten und der Auswahl der gewünschten Kurve aus den zwei in Betracht kommenden Evolventen, die als Partikulärlösungen aus den unterschiedlichen Evolventenscharen hervorgehen, erhält man nun die Ausgangskurve zurück. Dieses Verfahren ist aber nach den getroffenen Einschränkungen für die Evolute gegebenenfalls (wie auch bei der Rekonstruktion der Ellipse aus der Astroiede) intervallweise zu wiederholen.