

Fixpunkte und ihre Anwendungen

Teilnehmer:

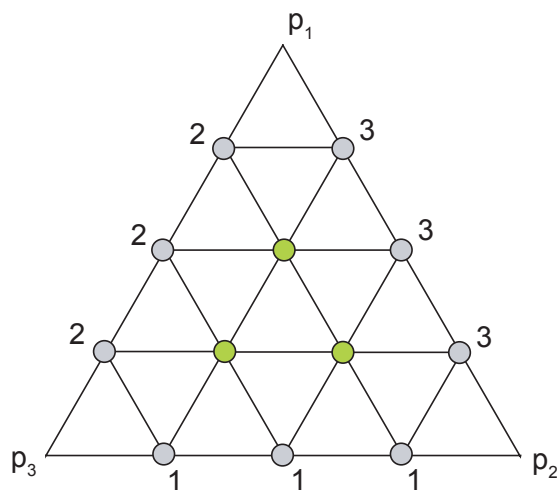
Thomas Bünger	Heinrich-Hertz-Oberschule
Erik Esche	Herder-Oberschule
Felix Günther	Herder-Oberschule
Arne Müller	Herder-Oberschule
Andrej Stepanchuk	Heinrich-Hertz-Oberschule

Gruppenleiter:

Bernd Kummer	Humboldt-Universität zu Berlin
--------------	--------------------------------

Die Existenz von Lösungen in Gleichungen und anderen Problemen wird oft über Fixpunktsätze bewiesen (wann ist $f(x) = x$ lösbar?). Wir haben zwei Beweisprinzipien (von Banach und Brouwer) für solche Sätze studiert und auf konkrete Aufgaben angewandt.

Stichworte: konvexe Mengen, metrischer Raum (Eigenschaften, Beispiele), iterative Lösungsverfahren, Gleichungen für gesuchte Funktionen, Lösungen einfacher Spiele.



Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	22
2	Vorbereitende Definitionen und Aussagen	22
2.1	Metrik	22
2.1.1	Beispiele	22
2.2	Stetigkeit	23
2.3	Konvergenz	23
2.3.1	Beispiele	24
2.4	Vollständige Räume	24
3	Banach's Fixpunktsatz	25
4	Beweis zur Vollständigkeit von $C[a, b]$	26
5	Methode der sukzessiven Approximation	26
5.1	Beispiel	28
6	Brouwer's Fixpunktsatz	28
6.1	Beweis nach Scarf und Hoang Tuy	28
6.1.1	Fixpunktbedingung	29
6.1.2	Unterteilung des Simplex	30
6.2	Erweiterung auf beliebige konvexe Mengen	33
7	Sperners Lemma	35
7.1	Konvexe Hülle	35
7.2	Lemma	35
7.2.1	Sehen	36
7.2.2	Gesehen werden	37
8	Minimax-Satz	37
8.1	Beispiel	37
8.2	Konvexität	38
8.3	Beweis des Minimax-Satzes	38
8.4	Beweis der Stetigkeit von X^* und Y^*	39
8.5	Allgemeiner Fall ohne Striktheit	39
9	Retrakte	39
9.1	Satz	39
9.2	Äquivalenz	39
9.3	Beweis über den Brouwer'schen Fixpunktsatz	40
9.4	Beweis von Brouwers Fixpunktsatz über den Retraktsatz	40

1 Einführung

Eine *stetige* reelle Funktion $f = f(x)$ möge das Intervall $X = [0, 1]$ in sich selbst abbilden, d.h. $f(x) \in X$ für alle $x \in X$ und kurz $f : X \rightarrow X$.

Dann erkennt man leicht, dass es stets ein solches $x^* \in X$ gibt, welches

$$f(x^*) = x^*$$

erfüllt. Es heißt *Fixpunkt* von f .

Wenn f hinreichend "flach" wächst oder fällt, ist der Fixpunkt sogar eindeutig bestimmt.

Offenbar kann es im Allgemeinen viele Fixpunkte geben (z.B. wenn $f(x) = x$), und für Funktionen, die unsere Voraussetzungen der Stetigkeit bzw. $f(x) \in X$ nicht erfüllen, auch gar keine.

Weiter kann man auch dann Fixpunkte haben, wenn X irgendeine andere Menge ist. Allerdings - da man Stetigkeit zu brauchen scheint - sollte man diesen wichtigen Begriff schon auf Funktionen $f : X \rightarrow X$ übertragen können.

2 Vorbereitende Definitionen und Aussagen

2.1 Metrik

Eine Menge X mit der Funktion d heißt *metrischer Raum* (anschaulich Menge mit Abstand), wenn d jedem Paar von Elementen $x, y \in X$ einen "Abstand" $d(x, y) \geq 0$ zuordnet, sodass gilt:

- (i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- (ii) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$,
- (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$ (Dreiecksungleichung).

Die Funktion d heißt auch *Metrik*. Den Trivialfall $X = \emptyset$ schließen wir aus. Der metrische Raum selbst wird oft als Paar (X, d) bezeichnet. Er ändert sich, wenn man d ändert.

2.1.1 Beispiele

1. $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$.
2. $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = 0$ wenn $x = y$, $d(x, y) = 4711$ sonst.
3. $X = \text{Ebene}$, $d(x, y) = \text{euklidischer Abstand von } x \text{ und } y$.

2.2 Stetigkeit

Sind (X_1, d_1) und (X_2, d_2) zwei metrische Räume, so heißt $f : X_1 \rightarrow X_2$ *stetig in* $x^* \in X_1$, wenn es zu jedem (noch so kleinen) $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass

$$d_2(f(x), f(x^*)) < \varepsilon \quad \forall x \in X_1 \text{ mit } d_1(x, x^*) < \delta.$$

Ist f in jedem $x^* \in X_1$ stetig, so heißt f *stetig*.

Gibt es eine Konstante L , sodass

$$d_2(f(x), f(y)) \leq L \cdot d_1(x, y) \quad \forall x, y \in X_1, \quad (1)$$

so heißt f *Lipschitz-stetig*. Bekanntlich ist jede Lipschitz-stetige Funktion auch stetig. Dann reicht es, oben einfach $\delta < \varepsilon \cdot L^{-1}$ zu wählen.

Wir haben es zumeist mit dem Fall zu tun, dass beide metrischen Räume gleich sind; $(X_1, d_1) = (X_2, d_2) = (X, d)$. In diesem Fall definiert man:

Eine Lipschitz-stetige Funktion $f : X \rightarrow X$ heißt *kontraktiv*, wenn (1) mit einer Konstanten $L < 1$ gilt. Dann liegen die Bilder von f , nämlich $f(x)$ und $f(y)$, stets näher zusammen als die Urbilder x und y (falls $x \neq y$).

Für reelle Funktionen f mit dem üblichen Betragsabstand bedeutet dies, daß f hinreichend "flach" wächst oder fällt.

2.3 Konvergenz

Analog zum Reellen definiert man die *Konvergenz einer (unendlichen) Folge* $\{x_n\}_{n=1,2,\dots}$ von Elementen $x_n \in X$ gegen ein $x \in X$ im metrischen Raum (X, d) .

Die Folge $\{x_n\}$ konvergiert gegen x (kurz $x_n \rightarrow x$ für $n \rightarrow \infty$ oder $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$), wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n(\varepsilon)$ existiert, sodass

$$\forall n > n(\varepsilon) : d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Mit anderen Worten: $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ bedeutet, dass die reelle Folge $\{a_n\}_{n=1,2,\dots}$ der Abstände $a_n = d(x_n, x)$ gegen Null konvergiert.

Dann folgt stets aus der Dreiecksungleichung

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < 2\varepsilon \quad \forall n, m > n(\varepsilon). \quad (2)$$

Nimmt man in (2) das spezielle $\varepsilon' = \frac{1}{2}\varepsilon$ und setzt $n(\varepsilon) = n(\varepsilon')$, so folgt:

Falls

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n(\varepsilon)$ mit

$$\forall n, m > n(\varepsilon) : d(x_n, x_m) < \varepsilon. \quad (3)$$

Eine Folge (x_n) mit dieser (schwächeren) Eigenschaft heißt *Cauchy-Folge*, oft auch *Fundamentalfolge* genannt.

2.3.1 Beispiele

1. X bestehe aus allen reellen Zahlen ohne die Null, $d(x, y) = |x - y|$ sei der normale Abstand. Dann ist die Folge $\{x_n\}_{n=1,2,\dots}$ mit $x_n = \frac{1}{n}$ eine Cauchy-Folge, sie hat aber keinen Limes x , weil es den im Reellen existierenden Limes $x = 0$ in X nicht gibt.

2. Auch die rationalen Zahlen bilden mit ihrem normalen Abstand einen metrischen Raum, der nicht-konvergente Cauchy-Folgen besitzt. Die Elemente der Folge $(x_n) = (1 + \frac{1}{n})^n$ sind alle rationale Zahlen, allerdings liegt der Grenzwert in den irrationalen Zahlen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e.$$

2.4 Vollständige Räume

Das motiviert die Definition:

Ein metrischer Raum (X, d) heißt *vollständig*, wenn jede seiner Cauchy-Folgen auch konvergiert.

Lemma 1 *Die reellen Zahlen bilden mit $d(x, y) = |x - y|$ einen vollständigen metrischen Raum.*

Beweis: Der Beweis ist durchaus nicht trivial, weil man zunächst auf einer geeigneten Definition der reellen Zahlen (auf Grundlage der rationalen Zahlen) aufbauen muss. Wir helfen uns aus Zeitgründen mittels der Dezimaldarstellung (ohne uns um deren genauen Bezug zur reellen Zahl zu kümmern): Hat man eine Cauchy Folge reeller Zahlen x_n , so kann man $\varepsilon = 10^{-2k}$ setzen, um zu sehen, dass für $n, m > n(\varepsilon)$ die ersten k Kommastellen von x_n und x_m gleich sein müssen. Macht man k beliebig groß ($k \rightarrow \infty$) und bildet x aus den dann festen Kommastellen, folgt $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

! Aber: Dieser Schluss ist nur dann richtig, wenn man vorher die Dezimaldarstellung eindeutig macht, indem man (z.B.) vereinbart, dass Ziffernfolgen (mit oder ohne Komma dazwischen) wie etwa 2000... durch 1999... ersetzt werden!

Ansonsten bekämen wir schon mit der Folge $x_n = 1,000\dots(n \text{ gerade}); x_n = 0,999\dots(n \text{ ungerade})$ Probleme. \square

Auch die metrischen Räume zu Beispiel 2 und 3 sind vollständig.

Lemma 2 *(geometrische Reihe)*

Sei $0 < q < 1$ und $s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$. Dann gilt $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} < \frac{1}{1-q}$.

Beweis: Es ist nach Ausmultiplizieren $s_n(1 - q) = (1 + q + q^2 + \dots + q^n)(1 - q) = 1 - q^{n+1}$. Division durch $1 - q$ ergibt die Behauptung. \square

3 Banach's Fixpunktsatz

Theorem 1 (*Banach's Fixpunktsatz*)

Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \rightarrow X$ kontraktiv. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt x^* .

Zusatz: Mit jedem $x_0 \in X$ gilt $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, wenn $x_{n+1} = f(x_n) \forall n = 0, 1, 2, \dots$.

Beweis: Wir wissen, dass mit einem $L = q \in]0, 1[$ wegen der Kontraktivität gilt

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) = d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \leq q \cdot d(x_{n+1}, x_n) \quad , \text{ falls } n \geq 0.$$

Also erhält man $d(x_2, x_1) \leq q \cdot d(x_1, x_0)$, $d(x_3, x_2) \leq q \cdot d(x_2, x_1) \leq q^2 \cdot d(x_1, x_0)$ und per vollständiger Induktion $d(x_{n+1}, x_n) \leq q^n \cdot d(x_1, x_0)$. Das bringt nach mehrmaliger Anwendung der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leq d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + d(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq q^{n+k-1} \cdot d(x_1, x_0) + q^{n+k-2} \cdot d(x_1, x_0) + \dots + q^n \cdot d(x_1, x_0) \\ &= (q^{k-1} + q^{k-2} + \dots + 1) \cdot q^n \cdot d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{1}{1-q} \cdot q^n \cdot d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Ist nun $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben, findet sich ein natürliches N , sodass

$$\frac{1}{1-q} \cdot q^N \cdot d(x_1, x_0) < \varepsilon.$$

Dies zeigt uns mit $n(\varepsilon) = N$ und $m = n + k$ in (3), dass die Folge $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge ist. Wegen der Vollständigkeit von (X, d) existiert also der Grenzwert $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Fixpunkteigenschaft von x^* : Es gilt:

$$\begin{aligned} d(f(x^*), x^*) &\leq d(f(x^*), x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x^*) \\ &= d(f(x^*), f(x_n)) + d(x_{n+1}, x^*) \\ &\leq q \cdot d(x^*, x_n) + d(x_{n+1}, x^*). \end{aligned}$$

Die rechte Seite wird beliebig klein (für $n \rightarrow \infty$) wegen $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Also muss $d(f(x^*), x^*) = 0$ und damit $f(x^*) = x^*$ sein.

Eindeutigkeit des Fixpunktes x^* :

Gibt es einen zweiten Fixpunkt $x^{**} = f(x^{**})$, so folgt

$$d(x^*, x^{**}) = d(f(x^*), f(x^{**})) \leq q \cdot d(x^*, x^{**}).$$

Das kann mit $0 < q < 1$ aber nur gelten, wenn $d(x^*, x^{**}) = 0$, also $x^* = x^{**}$ ist. Damit ist alles gezeigt. \square

Es ist von Nutzen, dass der Beweis gleich die im Zusatz angegebene Konstruktionsmethode für den Fixpunkt mitliefert. Die Methode heißt auch *Methode der sukzessiven Approximation*.

4 Beweis zur Vollständigkeit von $C[a, b]$

Definition $C[a, b]$ besteht aus allen auf $[a, b]$ definierten, stetigen, reellen Funktionen $x = x(t)$. Es wird folgende Abstandsfunktion d vereinbart:

$$d(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|.$$

Behauptung: $C[a, b]$ ist vollständig.

Beweis: Offensichtlich genügt es zu zeigen: Wenn $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, so existiert $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ als Element von $C[a, b]$.

Es ist Folgendes bekannt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon) : d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m > n(\varepsilon).$$

Wir betrachten bei festem $t \in [a, b]$ die reellen $x_m(t)$. Dann ist $|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$ mit $n > n(\varepsilon), m \geq n(\varepsilon)$. Wenn n fest ist und wir m gegen Unendlich gehen lassen ($m \rightarrow \infty$), dann ist die linke Seite eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} und damit existiert: $x(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_m(t)$. Wegen $|x_n(t) - x_m(t)| \leq \varepsilon$ und $|x_m(t) - x(t)| \rightarrow 0$ für $n > n(\varepsilon)$ und $m \rightarrow \infty$:

$$|x_n(t) - x(t)| \leq |x_n(t) - x_m(t)| + |x_m(t) - x(t)| \leq \varepsilon + |x_m(t) - x(t)| \leq 2 \cdot \varepsilon. \quad (4)$$

Hieraus folgt:

$$|x_n(t) - x(t)| \leq 2 \cdot \varepsilon, \text{ falls } n > n(\varepsilon).$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen beweisen wir nun die Stetigkeit von $x = x(t)$:

Sei $t, s \in [a, b]$. Da jede auf einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion gleichmäßig stetig ist, gilt: $|x_n(t) - x_n(s)| < \varepsilon$, falls $|t - s| < \delta = \delta(\varepsilon)$. Mit (4) erhalten wir dann:

$$|x(t) - x(s)| \leq |x(t) - x_n(t)| + |x_n(t) - x_n(s)| + |x_n(s) - x(s)| \leq 2 \cdot \varepsilon + \varepsilon + 2 \cdot \varepsilon = 5 \cdot \varepsilon.$$

Für $s \rightarrow t$ geht $\varepsilon \rightarrow 0$, somit haben wir die Stetigkeit von x bewiesen und damit auch die Vollständigkeit von $C[a, b]$. \square

5 Methode der sukzessiven Approximation

Gegeben sei die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(x(t), t) \quad \forall t$ mit dem gegebenen reellen Anfangswert $x(0) = x_0$. Desweiteren sei bekannt, dass f ganz \mathbb{R}^2 nach \mathbb{R} abbildet. Außerdem soll f bezüglich x eine einheitliche Lipschitz-Bedingung erfüllen. Dies bedeutet für f , dass ein $L > 0$ für alle ξ mit $|f(\xi_1, s) - f(\xi_2, s)| \leq L \cdot$

$|\xi_1 - \xi_2|$ existiert. Die Lösung dieser Differentialgleichung führt zu einem Fixpunkt der folgenden Funktion:

$$y = y(t) := x_0 + \int_0^t f(x(s), s) ds,$$

dabei sollte $x \in C[a, b]$ und $0 \in]a, b[$ sein. Es gilt also: $\dot{y}(t) = f(x(t), t)$. Sei $F : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ so gewählt, dass für jeden Index $k \geq 0$ gilt:

$$F(x_k) = x_{k+1} = x_{k+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(x_k(s), s) ds. \quad (5)$$

Im Folgenden zeigen wir, dass F *kontraktiv* ist, hierfür betrachten wir $y_1 = F(x_1)$ und $y_2 = F(x_2)$:

$$\begin{aligned} |y_2(t) - y_1(t)| &\leq \left| \int_0^t f(x_2(s), s) ds - \int_0^t f(x_1(s), s) ds \right| \\ &\leq \left| \int_0^t |f(x_2(s), s) - f(x_1(s), s)| ds \right| \\ &\leq \left| \int_0^t L \cdot |x_2(s) - x_1(s)| ds \right| \quad (\text{Lipschitz - Bedingung}) \\ &\leq \left| \int_0^t L \cdot d(x_2, x_1) ds \right| \\ &\leq L \cdot |d(x_2, x_1) \cdot (b - a)|. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$d(y_2, y_1) \leq L \cdot (b - a) \cdot d(x_2, x_1) =: q \cdot d(x_2, x_1).$$

Damit ist F eine kontraktive Abbildung, falls $b - a$ hinreichend klein ist und damit $q \in]0, 1[$. Analog erhalten wir mit dem Banach'schen Fixpunktsatz, dass genau ein Fixpunkt von F existiert. Diesen erhalten wir mit der Iterationsvorschrift (5). Falls zwei Funktionen $x = x(t)$ und $y = y(t)$ anhand der Differentialgleichungen:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), y(t), t) \text{ und } \dot{y}(t) = g(x(t), y(t), t)$$

gesucht werden, dann funktioniert die Methode der sukzessiven Approximation analog. Es wird ein $\vec{x}(t) = (x(t), y(t))$ gesucht. Desweiteren gilt: $x_{k+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(x_k(s), y_k(s), s) ds$ und $y_{k+1}(t) = y_0 + \int_0^t g(x_k(s), y_k(s), s) ds$. Für n gesuchte Funktionen funktioniert die Methode ebenfalls analog.

5.1 Beispiel

Gegeben ist die Differentialgleichung $\dot{x}(t) = x(t)$ mit dem Anfangswert $x(0) = 1$. Sukzessives Verwenden der Iterationsvorschrift (5) ergibt:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= 1 \\x_2(t) &= 1 + \int_0^t 1 \, ds = 1 + t \\x_3(t) &= 1 + \int_0^t (1 + s) \, ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} \\&\vdots \\x_k(t) &= 1 + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) &= e^t\end{aligned}$$

Die e -Funktion erfüllt also die gegebene Differentialgleichung.

6 Brouwer's Fixpunktsatz

Dieser Satz stellt unter anderen Voraussetzungen die Existenz mindestens eines Fixpunktes fest. Das Beweisprinzip ist völlig anders.

Man denke sich in der Ebene X , deren Punkte x wir mit kartesischen Koordinaten $x = (x_1, x_2)$ beschreiben, eine *konvexe* Menge M (nicht leer). *Konvex* bedeutet, daß jeweils die gesamte Verbindungsstrecke zweier Punkte x und y in M liegt, sofern x und y aus M sind (alle Punkte in einem Kreis, Rechteck, Dreieck, ... bilden konvexe Mengen). Die Menge M sei weiter *beschränkt* (sie enthalte keinen Strahl) und *abgeschlossen* (sie enthalte alle ihre 'Randpunkte'). Mit dem gewöhnlichen euklidischen Abstand d sind X und die Menge M metrische Räume. Damit sind stetige Funktionen $f : M \rightarrow M$ definiert.

Völlig analog kann man vereinbaren, was *abgeschlossene, beschränkte konvexe Mengen und stetige Funktionen* im 3-dimensionalen euklidischen Raum und im n -dimensionalen sind.

Theorem 2 (Brouwer's Fixpunktsatz)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe, abgeschlossene, beschränkte, nichtleere Menge im euklidischen Raum und $f : M \rightarrow M$ eine stetige Funktion, so existiert mindestens ein Fixpunkt (nach Lutzien Egbertus Jan Brouwer).

6.1 Beweis nach Scarf und Hoang Tuy

Wir betrachten einen konstruktiven Beweis nach Scarf und Hoang Tuy. Zuerst betrachten wir, dass es sich bei M um ein Simplex handelt, den wir später verallgemeinern.

Zur Veranschaulichung benutzen wir Skizzen für $n = 2$.

Lemma 3 *Jeder Punkt $x \in M$ lässt sich eineindeutig als konvexe Kombination der Eckpunkte p_i des Simplex darstellen:*

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \cdot p_i \quad \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1 \quad \forall_{i \in \mathbb{N}^*} i \leq n+1 : \alpha_i \geq 0$$

Der Beweis hierfür basiert auf der Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen.

Für unseren Spezialfall ($n = 2$) ergibt sich also:

$$x = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3.$$

Da die Funktion f selbstabbildend ist, ergibt sich analog:

$$f(x) = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3.$$

Da sich jedem x eineindeutig ein α -Tupel und jedem $f(x)$ ein λ -Tupel zuweisen lässt und darüber hinaus f stetig ist, ist auch die Abbildung der Alphas auf die Lambdas stetig.

6.1.1 Fixpunktbedingung

Die allgemeine Fixpunktbedingung $f(x) = x$ ist bei unserem Fall äquivalent zu der Bedingung

$$\forall_{i \in \mathbb{N}^*} i \leq n+1 : \quad \alpha_i = \lambda_i.$$

Unter der Nebenbedingung, dass die Alphas und Lambdas Konvexkombinationen der Eckpunkte definieren, ist die folgende Bedingung ebenfalls äquivalent dazu:

$$\forall_{i \in \mathbb{N}^*} i \leq n+1 : \quad \alpha_i \leq \lambda_i.$$

Beweis: Die Aufsummierung von diesen $n+1$ Ungleichung ergibt:

$$\underbrace{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n+1}}_{=1} \leq \underbrace{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n+1}}_{=1}.$$

Dies wiederum kann natürlich nur erfüllt werden, wenn für alle i $\alpha_i = \lambda_i$ gilt, da sonst die linke Seite echt kleiner wäre.

6.1.2 Unterteilung des Simplex

Das Ausgangssimplex lässt sich nun rekursiv zerteilen. Hierfür werden beispielsweise für den Fall $n = 2$ (also das Dreieck in der Ebene) die Mittelpunkte der drei Seiten verbunden, wodurch die Figur in vier kongruente Teildreiecke zerfällt. Dies wird auch als erste Zerlegung bezeichnet.

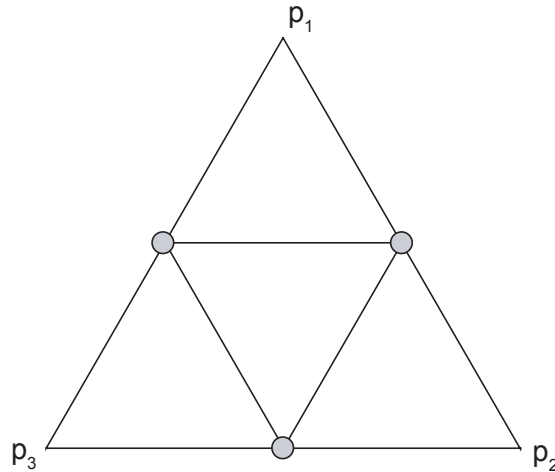


Abbildung 1: die erste Unterteilung des Simplex

Die zweite Unterteilung ergibt sich durch das Anwenden desselben Verfahrens auf die entstandenen Teildreiecke. Analog dazu ergibt sich die N -te Unterteilung. Die Eckpunkte aller so entstandenen Teilsimplizes bilden ein Raster.

All diesen Rasterpunkten kann nun mit einer geeigneten Indexfunktion ein Wert zugeordnet werden.

Die Menge I sei die Menge der gültigen Indexwerte und ist abhängig von der Stelle x (und damit von Alpha und Lambda) mit

$$I(x) = \{i | \alpha_i \leq \lambda_i\}.$$

Jede beliebige Indexfunktion $i(x)$ heißt *zulässig*, wenn gilt:

1. $i(x) \in I(x) \quad \forall x$
2. $i(x) = j$, falls $\alpha_j = 0$ und x keine Ecke ist

Nun besitzt jedes Teilsimplex an seinen Eckpunkten bestimmte Indizes. Die nachfolgende Skizze zeigt die triviale Indizierung der Eckpunkte bei einem Dreieck mit der zweiten Unterteilung. Die Punkte auf den Kanten des Dreiecks besitzen in ihrer Konvexkombination keinen Anteil des gegenüberliegenden Punktes. Somit

müssen nach der zweiten Regel der Indexfunktionen alle Punkte auf der Kante (die dem Punkt p_j gegenüber liegt) mit j bezeichnet werden, da $\alpha_j = 0$ ist. Die Eckpunkte werden nicht indiziert und in den nachfolgenden Betrachtungen ignoriert.

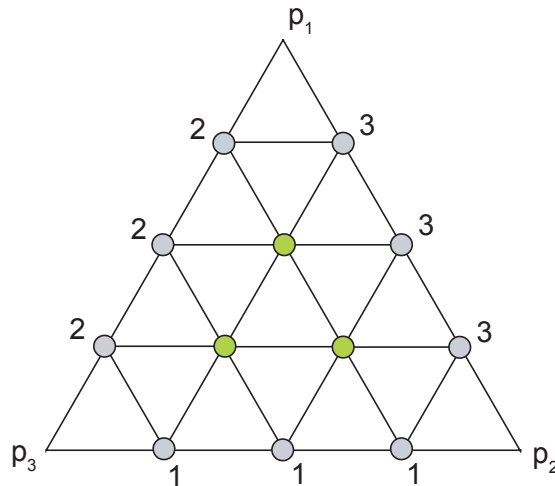


Abbildung 2: die N -te Unterteilung des Simplex (mit $N = 2$)

Wenn für ein Teilsimplex die Indizes aller Eckpunkte unterschiedlich sind, also alle Werte von 0 bis $n + 1$ an den $n + 1$ Ecken vorkommen, so bezeichnet man ein solches Teilsimplex als *normal*.

Im Fall $n = 2$ handelt es sich um Dreiecke, während im Dreidimensionalen entsprechend Tetraeder mit 4 Ecken verwendet werden. Für höhere Dimensionen gilt entsprechendes.

Weiterhin werden solche Simplexseiten, die an Ecken mit genau den Nummern 1 bis n angrenzen, *ausgezeichnet* genannt. Im Zweidimensionalen sind diese Seiten die Kanten eines Dreiecks und im Dreidimensionalen entsprechend die Flächen eines Tetraeders.

Im Folgenden lässt sich nun ein Algorithmus beschreiben um ein solches normales Teilsimplex zu finden.

Wir starten im Eckpunkt p_{n+1} . Das dazugehörige Teilsimplex hat genau eine ausgezeichnete Seite, was sich aus der trivialen Indizierung der angrenzenden Simplexseiten ergibt. Nun wechselt man in das Teilsimplex, das ebenfalls an die ausgezeichnete Seite angrenzt. Nun ergeben sich zwei Fälle:

1. Das neue Teilsimplex ist normal.
2. Das neue Teilsimplex ist nicht normal. Somit existiert ein Index, der doppelt vergeben ist. Da es bei einem Simplex zu jeder Kombination von Eckpunk-

ten eine Seite gibt, lässt sich diejenige Ecke, deren Index zweimal vorkommt, nun austauschen. Dadurch entsteht zwingenderweise genau eine weitere ausgezeichnete Seite.

Im ersten Fall endet der Algorithmus hier und wir haben ein normales Teilsimplex gefunden. Im zweiten Fall verlassen wir einfach das Teilsimplex durch die zweite ausgezeichnete Seite und betreten ein weiteres Teilsimplex.

Dies wiederholt man solange bis ein normales Teilsimplex gefunden wurde. Da die Anzahl an Teilsimplizes endlich und somit beschränkt ist, muss auch der Algorithmus terminieren. Denn jedes Teilsimplex besitzt höchstens zwei ausgezeichnete Seiten, kann somit also nur einmal in genau einer Richtung “durchlaufen“ werden, weshalb keine Zyklen entstehen können. Dadurch muss immer irgendwann ein normales Teilsimplex erreicht werden.

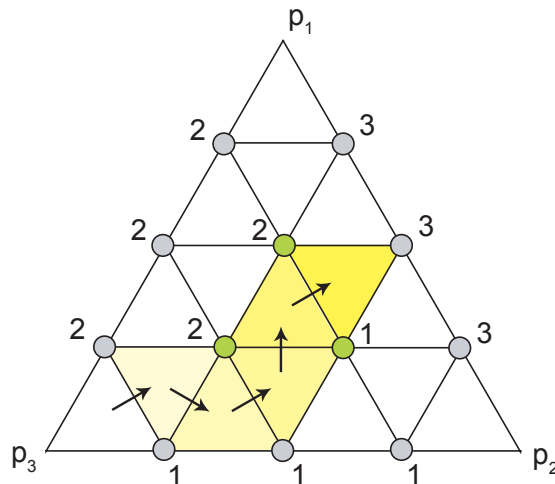


Abbildung 3: Weg durch den Simplex zu einem normalen Teilsimplex

Betrachten wir nun ein solches normales Teilsimplex näher. Da alle Indizes vorkommen, gibt es zu jedem i einen Eckpunkt h_i mit diesem Index i . Somit gilt:

$$\alpha_i(h_i) \leq \lambda_i(h_i) \quad \forall i$$

Dadurch werden *alle* Fixpunktgleichungen (allerdings nur in verschiedenen Punkten) im Teilsimplex erfüllt.

Aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit (stetig auf einer kompakten Menge) gilt:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 & : d(y, x) \leq \delta \Rightarrow d(\alpha_i(y), \alpha_i(x)) \leq \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 & : d(y, x) \leq \delta \Rightarrow d(\lambda_i(y), \lambda_i(x)) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Somit lässt sich $\alpha_i(x)$ beliebig genau durch $\alpha_i(y)$ und $\lambda_i(x)$ beliebig genau durch $\lambda_i(y)$ annähern. Dies lässt sich nun auf die Fixpunktungleichungen anwenden:

$$\begin{aligned} & \alpha_i(x) \leq \lambda_i(x) & (6) \\ \Leftrightarrow \alpha_i(y) - \varepsilon & \leq \alpha_i(x) \leq \lambda_i(x) \leq \lambda_i(y) + \varepsilon \\ \Leftrightarrow & \alpha_i(y) - \varepsilon \leq \lambda_i(y) + \varepsilon \\ \Leftrightarrow & \alpha_i(y) \leq \lambda_i(y) + 2\varepsilon & (7) \end{aligned}$$

Dank der gleichmäßigen Stetigkeit gibt es nun immer ein Delta, sodass für ein vorgegebenes Epsilon die letzte Ungleichung erfüllt ist. Es muss also gelten: $d(y, x) \leq \delta$. Hierfür muss lediglich der Abstand zwischen zwei Punkten im Teilsimplex kleiner werden als Delta. Das kann erreicht werden, in dem man die Anzahl N der Unterteilungen genügend groß wählt, wodurch die Teilsimplizes beliebig klein gemacht werden.

Wenn man nun ε gegen null konvergieren lässt, so ergibt sich nach (7) folgende Ungleichung für alle i und j :

$$\alpha_i(h_j) \leq \lambda_i(h_j)$$

Somit sind alle Bedingungen für den Fixpunkt erfüllt, ein Fixpunkt existiert also. \square

6.2 Erweiterung auf beliebige konvexe Mengen

Das oben vorgestellte Verfahren lässt sich nicht nur für Simplizes anwenden, sondern auch für beliebige konvexe Mengen. Hierzu wird die abgeschlossene, beschränkte konvexe Menge M im n -dimensionalen euklidischen Raum einem n -dimensionalen Simplex S einbeschrieben.

Nun muss die Funktion f auf ganz S erweitert werden – unter Beibehaltung der Stetigkeit. Hierfür bildet man alle Punkte aus S mit einer neuen Funktion g auf M ab. Auf die entstandenen Bildpunkte ist nun f anwendbar. Die Gesamtfunktion ist also $\bar{f}(x) := f(g(x))$.

Jedem Punkt x aus S wird solch ein x' aus M zugewiesen, sodass der euklidische Abstand zwischen x und x' minimal ist. Daraus erkennt man, dass allen Punkten außerhalb von M ein Randpunkt von M zugewiesen wird. Man erkennt auch, dass alle Punkte, die selbst schon aus M sind, wieder auf sich selbst abgebildet werden, da sie schließlich den kleinsten Abstand zu sich selbst haben. Die Eindeutigkeit dieser Zuordnung ergibt sich aus der Konvexität der Menge M . Denn angenommen es gäbe zwei unterschiedliche Punkte x' und x'' aus M mit dem selben minimalen Abstand zu x , so hätte der Mittelpunkt zwischen den beiden

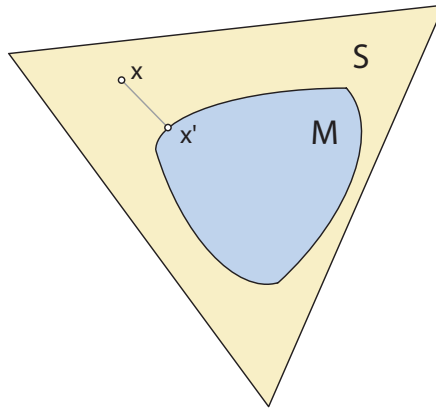


Abbildung 4: Konvexe Menge mit einhüllendem Simplex

(der wegen der Konvexität existiert) aufgrund von geometrischen Aspekten einen kleineren euklidischen Abstand zu x .

Der Beweis für die Stetigkeit erfolgt indirekt. Angenommen die Projektion $f(g(x))$ ist unstetig in einem speziellen x , das auf x' abgebildet wird, so gibt es eine Folge x_n die gegen x konvergiert, deren Funktionswertefolge x'_n allerdings nicht gegen x' sondern x'' konvergiert.

Damit gelten für die Abstände mit einer stetigen Abstandsfunktion d (der euklidische Abstand ist eine solche Funktion) folgende Relationen:

$$d(x, x') < d(x, x'') \quad (8)$$

$$d(x_n, x'_n) \leq d(x_n, x') \quad \forall n. \quad (9)$$

Nach der Stetigkeit von d folgt aus (9) für $n \rightarrow \infty$:

$$d(x, x'') \leq d(x, x'). \quad (10)$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu (8), sodass $x' = x''$ sein muss, also ist g stetig.

Nun ist der Brouwer'sche Fixpunktsatz auf das einhüllende Simplex mit der stetigen Funktion \bar{f} anwendbar. Demzufolge existiert ein $\bar{x} \in S$ mit $\bar{f}(\bar{x}) = \bar{x}$. Da aber das Bild von \bar{f} in M liegt, muss auch $\bar{x} \in M$ sein.

Da für alle $x \in M$ stets $f(x) = \bar{f}(x)$ gilt, ist \bar{x} auch ein Fixpunkt von f in M . \square

7 Sperners Lemma

7.1 Konvexe Hülle

Gegeben seien die Punkte p_1, \dots, p_m . Die Menge der Konvexkombinationen dieser Punkte bezeichnet man als konvexe Hülle

$$\text{conv} \{p_1, \dots, p_m\}.$$

7.2 Lemma

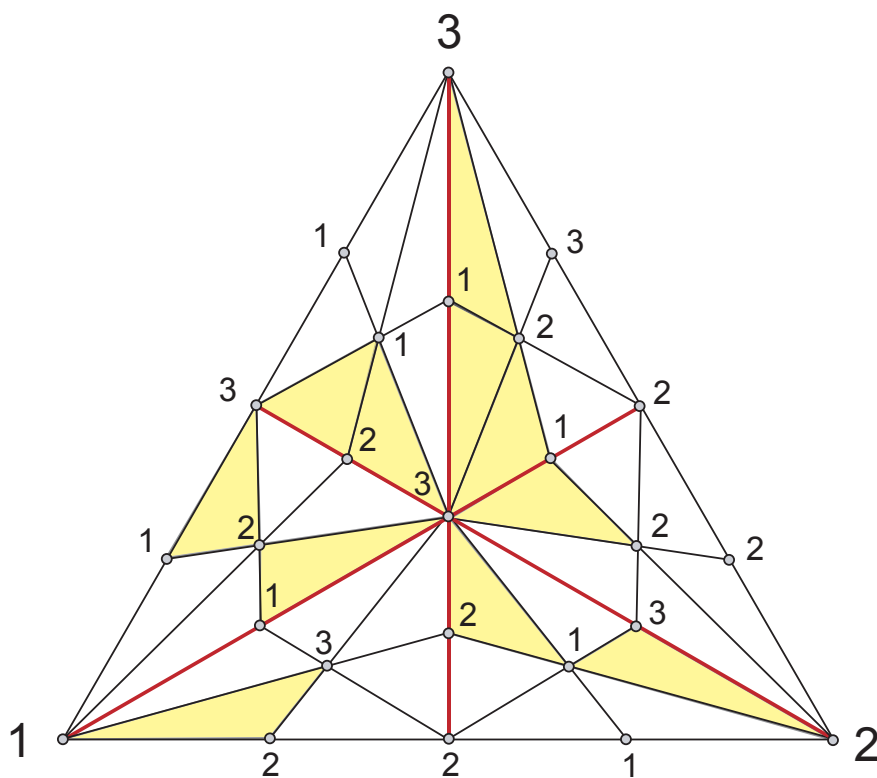


Abbildung 5: Veranschaulichung des Lemmas von Sperner

Ausgangspunkt ist das Verfahren von Brouwer. Jedoch wird ein Simplex mit den Ecken p_1, \dots, p_n über seinen Schwerpunkt r in Teilsimplizes unterteilt.

$$r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i.$$

Dabei wird r zu einer neuen Ecke und bildet mit jeweils einer anderen Ecke und dem Mittelpunkt der Seite dieser Ecke einen neuen Teilsimplex. Dieses Verfahren

kann nun wieder auf die neu entstandenen Teilsimplizes angewendet werden um eine beliebige (N -fache) Unterteilung vorzunehmen.

Die Seiten des Ausgangssimplex bilden eine konvexe Hülle, zu der x gehöre:

$$x \in \text{conv} \{p_1, \dots, p_n\}.$$

Sei nun die Indexmenge als

$$I(x) = \{i | \alpha_i \geq \lambda_i\}$$

definiert und sei

$$\forall x : i(x) \in I(x)$$

eine zulässige Indexfunktion mit dem Zusatz, dass dem Punkte $p_{k \in \{1, \dots, n\}}$ jeweils k zugeordnet wird, so gibt es stets eine ungerade Anzahl normaler Teilsimplizes.

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: $n = 1$: p_1 : trivial

Es wird nun zwischen den folgenden zwei Sichtweisen auf das Simplex unterschieden:

7.2.1 Sehen

Man läuft durch alle Teilsimplizes T_k mit $k = 1, \dots, N$ und zählt die gesehenen ausgezeichneten Seiten, deren Anzahl $g(k)$ sei. Die Summe sei

$$s = \sum_{k=1}^N g(k).$$

Nun gibt es zwei Möglichkeiten:

1. T_k ist normal: $g(k)$ ist somit 1, weil genau einmal die Eckennummern von 1 bis n vorkommen.
2. T_k ist nicht normal: $g(k)$ ist somit 0 oder 2, weil mindestens eine Eckennummer doppelt vorkommt. Man benötigt nämlich die Nummern $1, \dots, n-1$ für eine ausgezeichnete Seite. Man hat aber entweder die letzte Nummer (bei p_n) doppelt, sodass jeweils mit einer der beiden doppelten Nummern eine ausgezeichnete Seite gebildet werden kann, oder man hat eine andere Nummer doppelt, sodass diese Nummer der ausgezeichneten Seite fehlt.

Man erkennt nun, dass die Summe s genau dann ungerade ist, wenn die Anzahl der normalen Teilsimplizes ungerade ist.

7.2.2 Gesehen werden

Als nächstes betrachtet man die Situation aus der Sicht der ausgezeichneten Seite θ und zählt, wie oft diese gesehen wurde. Es ergeben sich wieder zwei Möglichkeiten:

1. Alle Punkte von θ liegen in der Original-Simplexseite der Ecken p_1 bis p_{n-1} : θ wird genau einmal von innen aus gesehen. In den Original-Seiten mit den Ecken von p_{n-1} bis p_1 gibt es keine ausgezeichneten Seiten, da hier eine Indexnummer fehlt.
2. θ liegt nicht im Rand: θ wird von den zwei benachbarten Teilsimplizes gesehen.

Somit ist $s = a + 2b$, wobei a die Anzahl der ausgezeichneten Seiten im Fall 1 ist und b im Fall 2. Man erkennt, dass s genau dann gerade ist, wenn auch a gerade ist. a ist aber auch gleichzeitig die Anzahl normaler Teilsimplizes in einem Simplex der Dimension $n - 2$ und somit auch ungerade. Damit ist auch s ungerade. \square

8 Minimax-Satz

Sei $f(x, y) \in \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in y konkav und in x konvex ist. Es gelte

$$\begin{aligned}x &\in X \subset \mathbb{R}^n, \\y &\in Y \subset \mathbb{R}^m \text{ und} \\n, m &\in \mathbb{N}^*,\end{aligned}$$

wobei X und Y konvexe, abgeschlossene und beschränkte Mengen seien.

Für den Sattelpunkt (x^*, y^*) gelte somit:

$$\forall x \in X, y \in Y : f(x, y^*) \leq f(x^*, y^*) \leq f(x^*, y)$$

Unter diesen Voraussetzungen existiert stets wenigstens ein Sattelpunkt.

8.1 Beispiel

Es werde Schere-Stein-Papier gespielt. Dabei sei $x = (x_1, x_2, x_3)$ eine gemischte Strategie. Sei a_{ij} der Gewinn von Spieler 1 bei der Originalstrategie i (Stein) gegen die Originalstrategie j (Papier) des Gegners.

Bei x gegen die Strategie j beträgt der Erwartungswert des Gewinns

$$\sum_i x_i a_{ij}.$$

Insgesamt ergibt sich somit für x gegen y

$$\sum_j \sum_i x_i a_{ij} y_j = x^T A y = f(x, y),$$

wobei A eine Matrix mit den Gewinneinträgen a_{ij} ist. Aus der Linearität in x und y folgt, dass f konvex-konkav ist.

8.2 Konvexität

Die Funktion g nennt man *konvex*, falls gilt:

$$\forall x, x' \in X \forall \lambda \in]0, 1[: g(\lambda x + (1 - \lambda)x') \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(x')$$

8.3 Beweis des Minimax-Satzes

Sei f eine strikt konvex-konkave Funktion. Man betrachte nun irgendein Paar $(x, y) \in M$. Es seien

$$X^*(y) = \{\xi \in X | f(\xi, y) = \max_{x' \in X} f(x', y)\}$$

$$Y^*(x) = \{\xi \in Y | f(x, \xi) = \min_{y' \in Y} f(x, y')\}.$$

Als F nehme man nun $F(x, y) = X^*(y) \times Y^*(x)$, da in einer konvexen Menge das Maximum/Minimum genau einen Punkt beschreibt, falls f strikt konkav/konvex ist. Dieses F ist stetig, was später noch bewiesen wird.

Nun sei (x^*, y^*) der Fixpunkt.

Es gilt somit, dass x^* die beste Antwort auf y^* ist

$$\iff f(x^*, y^*) \geq f(x, y^*) \forall x \in X$$

und dass y^* die beste Antwort auf x^* ist

$$\iff f(x^*, y^*) \leq f(x^*, y) \forall y \in Y.$$

Daraus folgt die Behauptung.

8.4 Beweis der Stetigkeit von X^* und Y^*

Sei (y_k) eine Folge, die gegen y konvergiert. Man betrachte nun das beste x_k zu y_k . Es konvergiere (x_k) gegen \bar{x} . Nun ist zu zeigen, dass \bar{x} optimal für y ist. Wäre dies nicht der Fall, dann würde gelten:

$$\exists \xi \in X : f(\xi, y) < f(\bar{x}, y) - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Daraus folgt, dass x_k nicht die beste Antwort zu y_k ist, da hier ξ besser ist und somit muss \bar{x} optimal sein. \square

8.5 Allgemeiner Fall ohne Striktheit

f sei geändert:

$$f_\varepsilon(x, y) = f(x, y) - \varepsilon \|x\|_2 + \varepsilon \|y\|_2$$
$$\|x\|_p = \sum_{i=1}^n x_i^p.$$

Diese neue Funktion ist strikt konvex-konkav und man kann den Minimax-Satz auf f_ε anwenden. Sei $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ der Sattelpunkt von f_ε . Für $\varepsilon_k \rightarrow 0$ mit $k \rightarrow \infty$ kann man nun die Folgen (x_{ε_k}) und (y_{ε_k}) betrachten. Nach Auswahl einer geeigneten Teilfolge konvergieren diese gegen einen Sattelpunkt von f . Der Beweis erfolgt analog zum Beweis der Stetigkeit von X^* und Y^* .

9 Retrakte

Sei B eine Einheitskugel. Eine Teilmenge $C \subset B$ ist ein Retrakt, falls es eine stetige Abbildung $f : B \rightarrow C$ gibt mit

$$\forall x \in C : f(x) = x. \tag{11}$$

9.1 Satz

Der Rand $C = \partial B$ ist nie Retrakt von B .

9.2 Äquivalenz

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass dieser Satz äquivalent zu Brouwers Fixpunktsatz ist. Dazu soll zum einen der Retraktsatz aus dem Brouwer-Satz geschlossen werden und umgekehrt.

9.3 Beweis über den Brouwer'schen Fixpunktsatz

Angenommen ∂B ist Retrakt von B . Es sei nun

$$g(x) = -f(x).$$

mit $g : B \rightarrow B$, wobei f die Retrakt-Abbildung ist. g besitzt den Fixpunkt $x^* \in \partial B$:

$$x^* = g(x^*) = -f(x^*).$$

Nach (11) gilt aber

$$x^* = f(x^*).$$

Wegen diesem Widerspruch kann der Rand der Einheitskugel nie deren Retrakt sein. \square

9.4 Beweis von Brouwers Fixpunktsatz über den Retrakt-satz

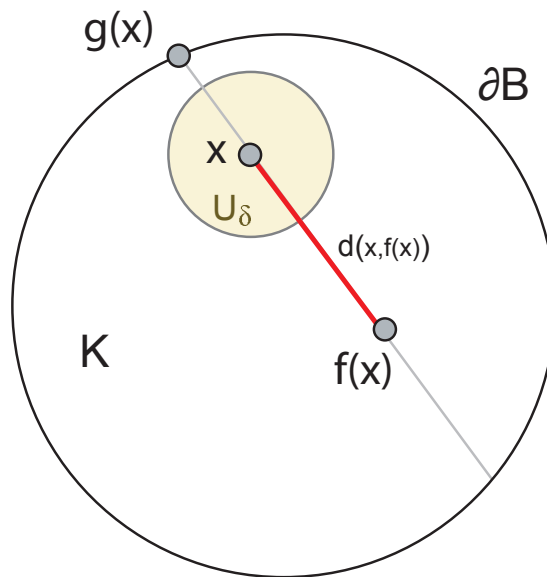


Abbildung 6: Einheitskreis

Angenommen Brouwers Satz sei falsch. Dann gibt es eine Kugel (analog zum Simplex), sodass mit einer geeigneten stetigen Abbildung $f : K \rightarrow K$ der Fixpunktsatz nicht gilt.

O.B.d.A sei K die Einheitskugel B , dann gilt:

$$\forall x \in B : f(x) \neq x \tag{12}$$

$$\Rightarrow \inf d(x, f(x)) > 0 \tag{13}$$

Die Folgerung (13) muss gelten, denn sonst würde eine Folge (x_k) mit $x_k \in B$ existieren, für die gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, f(x_k)) = 0.$$

Nun lässt sich eine geeignete Teilfolge (x_{k_t}) auswählen, deren Grenzwert x^* sei. Wegen der Stetigkeit von f gilt nun

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(x_{k_t}) = f(x^*) \Rightarrow d(x^*, f(x^*)) = 0. \tag{14}$$

Aus (12) folgt somit

$$d(x, f(x)) \geq \delta > 0.$$

Nun definiert man $g(x)$ als den Schnittpunkt der Geraden durch x und $f(x)$ mit dem Rand von K . Dabei soll x zwischen $g(x)$ und $f(x)$ liegen. Diese neue Abbildung ist stetig (wegen der Stetigkeit von f) und ein Retrakt, denn es gilt $g(x) \in \partial B$ und mit $x \in \partial B$ folgt per Konstruktion

$$g(x) = x.$$

Die Existenz dieses Fixpunktes steht im Widerspruch zu der Annahme (12) und somit war die Annahme falsch. \square